LAS PRÁCTICAS DE JUSTIFICACIÓN EN EL AULA DE MATEMÁTICAS

Mirela Rigo, Teresa Rojano, François Pluvinage

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I. P. N., México.

RESUMEN

En la comunicación se exponen los resultados parciales de un estudio centrado en el análisis del papel que juega el convencimiento en la construcción del conocimiento matemático que se da en el aula. Se describen los resultados de una investigación empírica, centrada en el análisis de un estudio de caso longitudinal, en el que se examinan las prácticas de justificación y promoción de convencimiento a las que sistemáticamente recurre una profesora de sexto grado de primaria. Además de describir los patrones de racionalidad identificados en las clases observadas, en el escrito se muestra que en el aula pueden converger, en un mismo recorrido discursivo, argumentos por razones y argumentaciones por motivos y que ahí, las justificaciones son acumulativas, suelen ser implícitas, con límites borrosos y carecen de una estructura lineal.

ABSTRACT

The paper contains the partial outcomes of a study focused on analyzing the role played by convincingness in building mathematical knowledge in the classroom setting. The paper describes the findings of an empirical study that is centered on the analysis of a longitudinal case study, in which we analyze the justification practices and convincingness promotion systematically resorted to by a grade six elementary school teacher. In addition to describing the patterns of rationality identified in the classes observed, the paper serves to show that in the classroom setting, reasons-based arguments and motive-based lines of argument converge within one and the same discursive path. Consequently the justifications are cumulative, apt to be implicit, with blurred outer borders and lack a linear structure.

Rigo, M., Rojano, T., Pluvinage, F. (2009). Las prácticas de justificación en el aula de matemáticas. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 445-452). Santander: SEIEM.

PROBLEMÁTICA

Para los matemáticos, el convencimiento juega un papel central, no sólo en las prácticas sociales de certificación de resultados matemáticos (a través de mecanismos inter-subjetivos) sino en los procesos heurísticos y de formalización. En opinión de Tymoczko, por sólo poner un ejemplo, "una prueba matemática es aquella que… convence, se puede examinar (manualmente) y es formalizable" (1986).

Se expone en la comunicación una parte de una investigación más amplia, cuya problemática –que parte de una reflexión sobre el quehacer profesional de los matemáticos- está centrada justamente en el análisis del papel que juega el convencimiento (*convincigness*) (y otros estados epistémicos, como la certeza o la duda (Cfr. Rigo, 2009)) en la construcción de conocimiento matemático que se da en el salón de clases. Lo que aquí se reporta corresponde a una de las preguntas que vertebran la investigación, relativa al **cómo** el profesor (específicamente el de la escuela primaria) habitualmente convence en el aula.

MARCO INTERPRETATIVO. PRECISIONES SOBRE EL TÉRMINO 'JUSTIFICACIÓN'

En el trabajo se utiliza el término 'justificación' para hacer referencia a todo tipo de recursos argumentativos que se dan en clases de matemáticas para sustentar enunciados con contenido matemático y para promover un grado de adhesión y convencimiento hacia él. La amplitud del término obedece a que en el estudio interesa, centralmente, descubrir lo que para un grupo escolar resulta **razonable** (Bourdieu, 1992). En concordancia con esto, dentro de las justificaciones se incluyen:

- los argumentos basados en razones y
- las argumentaciones apoyadas en fuentes supra-racionales, es decir, basadas en los motivos personales de quien arguye (Cfr. Villoro, 2002). La justificación por motivos no obedece a una lógica racional, sino al propósito de conseguir alguna ganancia de tipo práctico o algún bienestar personal de aquel que arguye, lo cual no significa -cabe aclarar- que este tipo de argumentación esté necesariamente desapartada de la verdad.

Las justificaciones que aquí se analizan, se inscriben en el contexto de la resolución de ejercicios matemáticos que se plantean en clase (y que eventualmente provienen del libro de texto en uso) (Krummheuer, 1995).

Así como sucede con la prueba matemática (Hanna y Jahnke, 1996), una justificación suele tener dos propósitos:

- uno epistemológico, que consiste en aseverar, explicar o fundamentar una verdad matemática y
- uno psicológico, que consiste en que el interlocutor consiga algún aprendizaje, así como un estado epistémico (convencimiento, convicción o persuasión (Rigo, Ibid.) hacia la verdad en ciernes.

En el trabajo interesa descubrir técnicas y recursos a las que **sistemáticamente** acude el profesor en su aula para sustentar los resultados matemáticos e intentar convencer. A estos recursos argumentativos habituales en clase se les designa en este estudio mediante la expresión 'patrones de racionalidad'.

METODOLOGÍA Y TÉCNICAS EMPLEADAS EN LA INVESTIGACIÓN DE CAMPO

En la investigación se exploran, en forma cualitativa y a través de un estudio longitudinal (Lemke, 1997) de dos años de duración, las prácticas de justificación y certificación de resultados matemáticos relacionados con la proporcionalidad (Vergnaud, 1998) que espontáneamente y en condiciones ordinarias (Hersant, 2005) promueve en su aula una profesora de sexto grado de primaria (la maestra Diana) de una escuela pública de la Ciudad de México. Se eligió la profesora que destacó en un estudio piloto por su tendencia a justificar o promover entre sus alumnos la justificación de los enunciados matemáticos que surgen en clase.

Se recogieron los datos a través de la observación no participante en el aula; las clases atendidas se videograbaron y se elaboró un registro escrito a partir del digital.

RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN

En la clase de la Maestra Diana se identificaron patrones de racionalidad basados en razones y algunos otros basados en motivos. Los patrones encontrados se describen en lo que sigue.

Patrones de racionalidad basados en razones. Se identificaron dos tipos de patrones:

- Racionalidad Cartesiana. Las justificaciones que se estructuran conforme a este tipo de racionalidad están sustentadas en razones matemáticas suficientes de las que se derivan verdades necesarias. Caen dentro de esta clase de patrones el ejemplo genérico y el experimento de pensamiento que describe Balacheff (2000), por poner sólo un ejemplo. Lo que se encontró con más frecuencia en la clase de la Maestra Diana son las instanciaciones de fórmulas generales, así como los argumentos hipotético deductivos (a los que también hace referencia Reid, 2002).
- Racionalidad retórica[18]. Los argumentos que se ajustan a esta racionalidad se sustentan en razones matemáticas que no son concluyentes, de las que por tanto, sólo se pueden desprender verdades probables. Las pruebas que Balacheff (Ibid) incluye dentro del empirismo ingenuo y el experimento crucial son ejemplos de justificaciones que se ciñen a la racionalidad retórica. En la clase de la Maestra Diana se encontraron muchas argumentaciones de este tipo, como las subsunciones que se hacen a partir del análisis de algunos casos o de una figura.

Patrones de racionalidad basados en motivos. Se reconocieron en las clases observadas las siguientes justificaciones basadas en motivos:

- Racionalidad por autoridad. En este caso, la verdad de un enunciado con contenido matemático se sustenta en la autoridad del libro, de las matemáticas o del profesor. Se trasmiten los argumentos por autoridad a través de recursos estilísticos del habla (Searle, 1969) y del lenguaje corporal.
- Racionalidad por habituación. Las justificaciones por habituación provienen de la familiaridad que surge de la repetición de una expresión o una creencia; se basan en la preferencia de los seres humanos hacia lo que resulta natural y conocido.

[18] El término 'retórica' se retoma en este trabajo de la retórica redimida por Aristóteles en su *Retórica*.

La práctica de la Maestra Diana se caracteriza, entre otras cosas, justo por promover la repetición grupal y a voz alzada de las fórmulas matemáticas y de sus resultados, lo que aunque sea en forma inconsciente e involuntaria, muy probablemente favorece no sólo buenos procesos nemotécnicos, sino también procesos de adhesión hacia los contenidos matemáticos coreados y machacados. Es muy posible, por esto, que la racionalidad por habituación sea uno de los mecanismos para promover convencimiento más empleados en la clase observada.

Patrón de racionalidad operatoria. Conforme a este tipo de racionalidad, la verdad de los enunciados con contenido matemático se sustenta en la confianza que se le concede a las fórmulas y algoritmos de las matemáticas. La seguridad puede provenir de una racionalidad basada en razones (ya sean cartesianas, como las pruebas de las propiedades de un algoritmo, por ejemplo) o bien, basadas en motivos (como la fe en las matemáticas, por poner sólo una muestra).

Las justificaciones basadas en razones cumplen de una forma u otra con el objetivo epistemológico y el psicológico. En cambio, las basadas en motivos cubren sólo con el objetivo de promover un grado de convencimiento en el oyente.

Para ilustrar los patrones de racionalidad antes descritos, se presenta en lo que sigue un episodio de la clase de la Maestra Diana, en la que imparte la Lección 80 del Libro de Texto oficial de Matemáticas para Sexto Grado (2001) que lleva por título: "Distancia, tiempo y velocidad. Resolución de problemas mediante la utilización de tablas y gráficas". La clase tuvo una duración de una hora y el episodio duró 30 minutos. En el episodio se plantean los siguientes ejercicios:

En la siguiente tabla aparecen los tiempos que varios jóvenes hicieron en distintas competencias de natación.

		Tiempo		
		Horas	Minutos	Segundos
Amalia	100 metros	0	2	0
Beto	50 metros	0	0	50
Catalina	150 metros	0	2	51
Darío	1500 metros	0	40	0

Tabla 1. Libro de Texto

(i) ¿Quién de los cuatro nadó más distancia?
(ii) ¿Quién nadó durante menos tiempo?
(iii) ¿Quién nadó más rápido?
…
(iv) Calcula cuántos metros por segundo avanzó en promedio cada uno de los competidores.

En el Libro para el Maestro se sugiere para el ejercicio iii que se considere lo que cada uno de los competidores tardaría en recorrer 50 metros y lo comparen, de dos en dos, con el tiempo que tardó Beto. En el texto no se dan indicaciones para el cuarto.

El episodio que se analiza está vertebrado en torno a dos resoluciones de la pregunta iii. Una resolución la da Marina, una alumna aventajada, quien sin saberlo, procede conforme a la sugerencia del Libro para el Maestro. La otra resolución la dirige la Maestra, quien para resolver el ejercicio se auxilia de la resolución del cuarto; para esto emplea la fórmula d/t, que lleva la discusión del terreno de la proporcionalidad hacia el ámbito de las cantidades físico-aritméticas. En este escrito sólo se expone la resolución propuesta por la Maestra.

<table>
<tr><td>90.</td><td>M[19]:</td><td>¿Qué podemos hacer para saber cuántos segundos hizo Amalia, Catalina y Darío?</td></tr>
<tr><td>91.</td><td>D:</td><td>Dividiendo la distancia entre el tiempo</td></tr>
<tr><td>94.</td><td>M:</td><td>¡Dividiendo la distancia entre el tiempo! [con énfasis] ¡Claro!</td></tr>
<tr><td>95-121</td><td>M:</td><td>[bajo las instrucciones de la Maestra los alumnos hacen la conversión de minutos a segundos, respondiendo a coro y anotando los resultados en una tabla en el pizarrón]</td></tr>
<tr><td>122.</td><td>M:</td><td>Bien, ahora sí, Diego pasa al pizarrón, tú ya entendiste el problema, tú ya lo puedes resolver
[Diego pasa al pizarrón mostrando inseguridad. La Maestra les pide a otros alumnos que lo auxilien. Bajo su supervisión, integran la Tabla 3]</td></tr>
<tr><td>123-173</td><td></td><td>
<table>
<tr><td>50 metros</td><td>50 seg</td><td></td><td>1 m por seg</td></tr>
<tr><td>100 metros</td><td>2 min</td><td>120</td><td>0.83 metros por segundo</td></tr>
<tr><td>150 metros</td><td>2 min 51 seg</td><td>171</td><td>.87 metros x segundos</td></tr>
<tr><td>1500 metros</td><td>40 min</td><td>2400</td><td>.6 por seg</td></tr>
</table>
Tabla 3</td></tr>
<tr><td>174.</td><td>M:</td><td>Bien ¿Quién fue el que nadó más rápido?</td></tr>
<tr><td>175.</td><td>G*[20]:</td><td>Darío [a coro]</td></tr>
<tr><td>178.</td><td>M:</td><td>Darío [con énfasis, parece creerles] ¿quién me quiere decir por qué Darío?</td></tr>
<tr><td>179.</td><td>G:</td><td>[no participan]</td></tr>
<tr><td>182.</td><td>M:</td><td>¿por qué Darío? … ¿Cuántos metros por segundo nadó Darío?</td></tr>
<tr><td>183.</td><td>G:</td><td>[Dan diferentes respuestas] mil quinientos… seis…</td></tr>
<tr><td>184.</td><td>M:</td><td>¿Seis metros por segundo?</td></tr>
<tr><td>186.</td><td>M:</td><td>¿Quién es Darío?</td></tr>
<tr><td>187.</td><td>G:</td><td>El último</td></tr>
<tr><td>189.</td><td>M:</td><td>Él nadó punto seis metros por segundo ¿Cuánto nadó Catalina?</td></tr>
<tr><td>190.</td><td>M:</td><td>Anótales los nombres de aquél lado para que se ubiquen [los niños anotan los nombres del resto de los nadadores en una primera columna de la Tabla 3, integrando la Tabla 4]</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>
<table>
<tr><td>Beto</td><td>50 metros</td><td>50 seg</td><td></td><td>1 m por seg</td></tr>
<tr><td>Amalia</td><td>100 metros</td><td>2 min</td><td>120</td><td>0.83 metros por segundo</td></tr>
<tr><td>Catalina</td><td>150 metros</td><td>2 min 51 seg</td><td>171</td><td>.87 m x segundos</td></tr>
<tr><td>Darío</td><td>1500 metros</td><td>40 min</td><td>2400</td><td>.6 por seg.</td></tr>
</table>
Tabla 4</td></tr>
<tr><td>194.</td><td>M:</td><td>Levantamos la mano los que creemos que fue Darío… [la mayoría levanta la mano]</td></tr>
<tr><td>198.</td><td>M:</td><td>Díganme: ¿cuánto nadó Beto?</td></tr>
<tr><td>199.</td><td>G*:</td><td>un metro</td></tr>
<tr><td>200.</td><td>M:</td><td>¿Cómo?</td></tr>
<tr><td>201</td><td>G*:</td><td>Un metro por segundo</td></tr>
<tr><td>203.</td><td>M:</td><td>¿Cuánto nadó Amalia?</td></tr>
<tr><td>204.</td><td>G*:</td><td>Punto ochenta y tres metros por segundo</td></tr>
<tr><td>205.</td><td>M:</td><td>¿Cómo se lee?</td></tr>
<tr><td>206.</td><td>G*:</td><td>Ochenta y tres centésimos</td></tr>
<tr><td>207.</td><td>M:</td><td>Pero centésimos en metro ¿cómo se dice?</td></tr>
<tr><td>208.</td><td>A:</td><td>Centímetros</td></tr>
<tr><td>211-221.</td><td>M:</td><td>Centímetros por segundo [continúa la conversión de metros a centímetros de las expresiones que aparecen en la tercera columna y la lectura a coro de las expresiones resultantes. Todo esto bajo la dirección y supervisión de la Maestra] …</td></tr>
<tr><td>222.</td><td>M:</td><td>¿Quién nadó más?</td></tr>
</table>

[19] M: Maestra; G: grupo; A: alumno; D: Diego.
[20] * el grupo participa a coro

223.	*G*:*	Darío [respuesta asertiva de casi todo el grupo]
224.	*M:*	¿Darío? [cuestionando la respuesta, lo cual interpretan bien los alumnos y da pie para que modifiquen su respuesta]
225.	*G:*	Beto [respuesta titubeante que da una parte del grupo]
226.	*M:*	¿Quién nadó más? [promoviendo en el grupo un respuesta más decidida y comprometida]
227.	*G*:*	Beto [con mayor fuerza y participación]
228.	*M:*	¿Estaba correcto que era Darío? [con mucho énfasis, buscando y casi induciendo la respuesta]
229.	*G*:*	No
230.	*M:*	¿Quién nadó más rápido? [*in crescendo…*]
231.	*G*:*	Beto [el grupo completo, con énfasis]
232.	*M:*	Beto [aseverando con mucho énfasis] ¿por qué? … Es correcto, fue Beto porque ¿un metro es más chico que sesenta centímetros?
234.	*G*:*	No

Actividades matemáticas

En el fragmento, la Maestra retoma decididamente el cociente d/t propuesto por Diego como estrategia de resolución del problema. Para fines de la aplicación de esa fórmula, la Maestra involucra a los niños en dos procesos de conversión: uno, para homogeneizar las unidades de tiempo (90-121) y otro (198-221), para evitar los decimales.

La insistencia de la Profesora en el uso del cociente (d/t) (en éste y en otro ejercicio) genera la impresión de que ella posee una idea vectorial de la velocidad y la rapidez. No obstante, en sus intervenciones y en el remate del ejercicio (232) se alcanzan a identificar en ella (y en sus alumnos) las dificultades que tiene(n) para significar las magnitudes mixtas y promover esa idea vectorial, no sólo por que prácticamente ignora(n) dichas magnitudes a lo largo de toda la resolución, sino por las deficiencias que todo el grupo muestra para representarlas (v. Tabla 4).

Quizás debido a estos problemas conceptuales, la Maestra deja a los alumnos una de las partes más significativas y complejas de la resolución, que consiste en la comparación de las magnitudes mixtas, la interpretación de los resultados de esta comparación en términos de la rapidez, y los procesos de conversión del dominio físico aritmético al registro tabular.

Si bien la Maestra pudo arribar a una respuesta correcta del ejercicio (224-234) y articular un razonamiento incipiente con base en una idea de rapidez (el más rápido es aquél que recorre una distancia mayor en una unidad de tiempo dada, que se asume como una constante implícita), la mayoría de los alumnos (o los que se expresaron) no consiguen seguirle el paso y parecen centrar su atención sólo en una variable (la distancia), alcanzando sólo respuestas erróneas (175, 223).

Patrones de racionalidad

- Racionalidad Retórica

  Los procesos de instanciación de la fórmula que se dan en el episodio bajo la tutela de la Maestra, se podrían inscribir dentro de una racionalidad cartesiana (Rigo; 2009); no obstante, aunque obedecen a una estructura deductiva de especificación, ni los alumnos ni su Profesora poseen los elementos conceptuales para ofrecer una explicación suficiente o completa, desde el punto de vista matemático, de la verdad de los resultados que se derivan de la fórmula. La justificación es retórica, no sólo porque quedó incompleta, sino porque no incluye razones suficientes o conclusivas conforme a la **racionalidad del grupo**.

Además de la retórica, en el fragmento concurren otros muy distintos tipos de patrones de racionalidad, basados en motivos:

- Racionalidad por habituación

  La resolución dada en clase también está afianzada en una racionalidad por habituación: aunque muy posiblemente escapa de la intencionalidad o conciencia de la Maestra, es claro su interés porque los niños memoricen y se familiaricen con la fórmula y los resultados que arroja. Ella lleva a cabo, con toda paciencia, una tanda de aplicación del cociente (123-173) y luego dos tandas de repeticiones a voz alzada de los resultados de dicha aplicación (178-190; 198-221). Debido a la reiteración verbal de la fórmula, es muy probable que los estudiantes acaben por concederle alguna credibilidad o incluso certeza y que esto suceda a pesar de que tampoco esté dentro de los planes explícitos de la Profesora.

- Racionalidad operatoria

  La justificación, por otra parte, obedece también a una racionalidad operatoria, basada en motivos. En el episodio se muestra cómo los resultados que surgen en clase se van apuntalando en la confianza y 'casi fe' que la Maestra Diana tiene en las fórmulas simbólicas de las matemáticas, la cual muy posiblemente comparten sus alumnos: ahí no hay construcción de significados (ni lo hace ella ni lo solicita a los alumnos); ella confía en el cociente de la velocidad sin buscar siquiera darle alguna plausibilidad con los elementos conceptuales que el grupo tiene a la mano.

- Racionalidad por autoridad

  De igual forma, la resolución está apuntalada en la autoridad que ejerce la Maestra. En 257, por ejemplo, ella impone sutilmente la aplicación de la fórmula d/t para calcular la rapidez, apoyándose en su autoridad y en la de las matemáticas y al final del episodio recurre a una suerte de tácticas estilísticas, de entonación y modulación del habla para intentar persuadir a sus alumnos de la respuesta correcta y de la incipiente justificación que ahí ella les ofrece (224-234).

- Racionalidad pragmática

  Adicionalmente, la Maestra justifica la introducción de la fórmula con base en razones pragmáticas, al prometerles a sus alumnos que su aplicación les hará "más fácil todo" (95).

OTROS RESULTADOS

Las justificaciones identificadas en la clase de Diana se han descrito en forma separada sólo para fines del análisis; no obstante, en el aula -espacio de interacciones complejas- concurren en un mismo recorrido discursivo muy distintos patrones de racionalidad, como se puede observar en el fragmento de clase analizado: ahí se muestra cómo conviven argumentos por razones con distintas argumentaciones por motivos. Este traslapamiento de justificaciones deja ver que más que semejarse a las pruebas que aparecen en los tratados formales de matemáticas o incluso de los libros de texto, las justificaciones del aula son acumulativas, en muchos casos son implícitas (se llegan a comunicar a través de actos ilocutivos (Searle, 1969), o mediante actos iterados y repeticiones a voz alzada (Kilpatrick, 2007)), carecen de una estructura lineal y tienen límites borrosos, en tanto que no siempre es claro su inicio y su conclusión.

En el trabajo no se pretende prescribir alguna técnica de argumentación o recurso de adhesión. Simplemente tiene como meta el descubrir y describir la racionalidad o razonabilidad que prevalece en un aula ordinaria (sin privilegiar algún tipo de argumento o sin desconocer otro), bajo la consideración de que se trata de un fenómeno didácticamente significativo y que es digno de tomarse en cuenta no sólo en los procesos de enseñanza o aprendizaje, sino en los de formación de futuros profesores.

BIBLIOGRAFÍA

Balacheff, N., (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Bogotá Universidad de los Andes.

Balbuena, H., Block, D., Fuenlabrada, I., Waldegg, G. (2001). *Matemáticas. Sexto Grado.* Secretaría de Educación Pública. México: Dirección General de Materiales y Métodos Educativos de la Subsecretaría de Educación Básica y Normal.

Bourdieu, P. (1992). *El sentido práctico*. España: Editorial Taurus.

Hanna, G., Jahnke, H. (1996). Proof and Proving. Bishop *et al*. (eds.) *International Handbook of Mathematics Education*. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers. 877-908.

Hersant, M., Perrin-Glorian M. (2005). Characterization of an Ordinary Teaching Practice with the Help of the Theory or Didactic Situations. *Educational Studies in Mathematics*, 59, 113-151.

Kilpatrick, J. (2007). Recovering our memories. Conferencia Magistral. *Memorias de la XII Conferencia Interamericana de Educación*. 15 al 18 de julio del 2007. Querétaro, México.

Krummheuer, G. (1995). The Ethnography of Argumentation. En Cobb, P y Bauersfeld, H. (Ed.) *The Emergence of Mathematical Meaning*. U. S. A.: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Lemke, J. L., (1997). *Aprender a hablar ciencia. Lenguaje, aprendizaje y valores*. España: Ediciones Paidós Ibérica, S. A.

Reid, D. (2002). Describing young children's deductive reasoning. Cobb *et al.* (eds.). *Proceedings of the Twentieth-sixth Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Educat*ion (Vol. IV) 105-112. UK.

Rigo, M. (2009). *La cultura de racionalidad en el aula de matemáticas de la escuela primaria.* Tesis doctoral no publicada. México: Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I. P. N.

Searle, J. R. (1969). *Speech Acts*. Cambridge University Press.

Vergnaud, G (1988). Multiplicative Structures. In J. Hiebert & M. Behr (Eds). *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*. Vol. 2. pp. 141-161. Lawrence Erlbaum Associates, National Council of Teachers of Mathematics.

Villoro, L. (2002). *Creer, saber, conocer*. México: siglo veintiuno editores.