

La resolución de problemas aritméticos y su tratamiento didáctico en la Educación Primaria.

The resolution of arithmetic problems and their didactic treatment in Primary Education.

Manuel Barrantes López⁽¹⁾, Marco Augusto Zapata Esteve⁽²⁾

(1) Dpto. de Didáctica de las Ciencias Experimentales y de las Matemáticas.
Universidad de Extremadura.

(2) Universidad de Piura (Perú).

Fecha de recepción 22-04-2010. Fecha de aceptación 22-09-2010.

Resumen

En el presente trabajo, se realiza un estudio de los diferentes tipos de problemas que los profesores deben plantear a sus alumnos. Para analizar la resolución de los problemas se ha tenido en cuenta los modelos clásicos y otras propuestas actuales que benefician los procesos heurísticos en la resolución de los mismos.

Presentamos un desarrollo reflexivo sobre problemas divergentes, de cálculo mental y de estimación, justificando la importancia que tienen en el currículo de Primaria y en relación con la vida ordinaria.

Así mismo analizamos algunos problemas en los que se necesita poner énfasis en la comprensión del texto, en el razonamiento o en la solución, y que, son importantes para que el alumno se haga un buen resolutor de los mismos.

Los diferentes problemas planteados contribuyen a desarrollar en el alumno, su propia autonomía e iniciativa personal en aspectos como son la planificación, la gestión de recursos y la valoración de resultados. Así mismo, estos problemas los capacitan para utilizar herramientas matemáticas básicas, comprender informaciones que utilizan soportes matemáticos y fomentar el desarrollo de su comunicación lingüística.

Por último, se proponen problemas en los que el alumno debe colaborar en su construcción lo que contribuyen, como los anteriores, a su desarrollo personal en las competencias básicas.

Palabras Clave: resolución de problemas, clasificación de problemas, problemas aritméticos, formación de maestros.

Summary

In this article, an analysis of the different types of problems that teachers should pose their students was carried out. When analyzing mathematical problem solving, classic models as well as current proposals enhancing heuristic processes in their resolution have been taken into account.

We present a thorough development of divergent, mental calculation and estimation problems, highlighting their importance in the curriculum of Primary Education and in relation to ordinary life. We also analyze some problems that need to be given emphasis in the comprehension of the text, in the way of reasoning or in reaching the solution, which are important for the student to become a good problem solver.

The different problems put forward help pupils develop their autonomy and their individual initiative in planning, resource managing, and result evaluation. Further, these problems enable them to use basic mathematical tools, to understand news using mathematical expressions and to develop linguistic skills. Finally, we suggest some problems whose formulation can be made by pupils and which can therefore contribute to their personal development in basic competencies.

Key Words: *mathematical problem solving, problem typology, arithmetical problems, teacher education.*

Dimensiones de la resolución de problemas.

Para resolver problemas, el alumno debe saber utilizar los procedimientos, reglas, técnicas, destrezas y conceptos, que ha adquirido anteriormente, de tal forma que de la combinación acertada de éstos se obtengan soluciones para nuevos problemas o situaciones (Orton, 1990).

Actualmente, la resolución de problemas dentro de la educación matemática contempla tres dimensiones distintas (Juidías, y Rodríguez, 2007). Es considerada como un objetivo principal, ya que aprender matemáticas está ligado a que el alumno sea capaz de resolver problemas. A su vez, la resolución de problemas es una capacidad que debe adquirir el alumno ya que debe aprender técnicas, estrategias, maneras de descubrir o investigar que son

propias de dicha investigación. Y por último la resolución de problemas es una metodología que utiliza el profesor para la enseñanza y que se encuentra basada en la concepción constructivista del aprendizaje, es decir, aquellos conocimientos construidos por los propios alumnos son realmente operativos, duraderos y generalizables a diferentes contextos. Por el contrario, los conocimientos que simplemente se transmiten a los alumnos, no construidos por ellos, no quedan integrados en sus estructuras lógicas y sólo pueden aplicarlos en situaciones similares a las del aprendizaje.

La resolución de problemas como metodología ha sido recomendada desde los años 90 en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas de los currículos oficiales: autonómicos, nacionales y de

otros países. Concretamente el actual currículo en Extremadura dice:

“Los procesos de resolución de problemas constituyen uno de los ejes principales de la actividad matemática y deben ser fuente y soporte principal del aprendizaje matemático a lo largo de la etapa, puesto que constituyen la piedra angular de la educación matemática.” (Currículo de Educación Primaria, 2007, p.7909).

2.- Modelos de resolución de problemas.

Desde la triple dimensión para la resolución de problemas, descrita anteriormente, se han elaborado diferentes modelos. El más clásico y conocido es de Polya (1945), todavía vigente que consta de cuatro fases: comprensión del tema, planificación, ejecución del plan y supervisión. La gran mayoría de los modelos que se han elaborado posteriormente guardan estrecha relación con el modelo de Polya y sus fases. Hay diferentes propuestas unas, ya clásicas como Schoenfeld (1979), Montague (1988), Mayer (1991) hasta otras más actuales como Vila y Callejo (2004). Unos significativos cuadros resúmenes de las etapas que plantean los diferentes autores y su semejanza con el modelo Polya podemos encontrarlos en la recopilación que hacen Juidías y Rodríguez (2007) y Pino y Blanco (2008).

Las etapas de resolución de problemas, según el modelo de Polya, se refieren, en primer lugar, a que el alumno *comprenda el tema* como requisito principal antes de actuar. Para Mayer (1991) esto consiste en mudar cada oración a una

representación mental para posteriormente integrar esta información en un esquema coherente. En la siguiente etapa, *la planificación*, el alumno aprende a razonar cuáles son las ideas o procesos lógicos que le llevan a la solución, para ello examina las estrategias generales que puede aplicar y elige las acciones que debe realizar. Después en *la ejecución del plan* organizado en la etapa anterior, se traducen las ideas en términos de operaciones mediante las que se obtiene la solución o las soluciones. La última etapa sería *la supervisión* en la que se evalúan las decisiones tomadas y los resultados del plan realizado, por ejemplo, se comprueba que la solución es coherente y lógica para el problema planteado.

El modelo de Polya y todos los modelos propuestos posteriormente nos confirman la similitud entre la organización de las actividades humanas y la resolución de problemas. En ambos casos encontramos dificultades que superar, tomamos decisiones mediante las que encontramos caminos intermedios que nos van acercando a nuestro objetivo, es decir, se alcanzan los fines buscados mediante una planificación teniendo en cuenta los recursos que tenemos a nuestro alcance. Así pues, la educación matemática, mediante la resolución de problemas, es la mejor forma de desarrollar en los individuos capacidades en las que sepa responder a situaciones con cierta flexibilidad, aprender a sacar partido de circunstancias imprevistas, saber encontrar semejanzas entre situaciones que aparentemente no son parecidas y realizar síntesis de antiguos conceptos que den lugar a nuevas ideas e hipótesis de planteamientos.

3.- La enseñanza y la resolución de problemas en la Educación Primaria.

Los problemas a los que nos vamos referir a partir de ahora son aquellos problemas cotidianos del entorno y de la vida ordinaria del alumno de Primaria y que se resuelven con las operaciones elementales: adición, sustracción, multiplicación, división y sus combinaciones.

En la enseñanza tradicional, la resolución de problemas era una etapa final posterior a que el profesor explicara los contenidos: definiciones, propiedades,... Normalmente los problemas que el alumno resolvía en el aula eran los denominados *problemas tipo*, un conjunto de problemas al final de cada apartado de la unidad didáctica o una relación del final de la unidad, que se caracterizaban porque si sabíamos resolver el primero sabíamos resolver todos los que se enunciaban detrás de éste.

Estos problemas tipos podemos considerarlos como meros ejercicios de aplicación pues un verdadero problema exige más que la aplicación inmediata de una fórmula o un algoritmo. Así pues, en muchos casos, los problemas de cada unidad didáctica estaban agrupados en una serie de problemas tipos. La evaluación del alumno, que realizaba el profesor, también consistía en resolución de problemas tipo. Los alumnos, a su vez, preparaban los exámenes intentando comprender los problemas y si esto no era posible los memorizaban.

Así pues a lo largo de los años, los alumnos adquirían unas concepciones muy pobres sobre la resolución de problemas. Cuando llegan a la universidad

creen que los problemas que se les va a proponer son similares a los propuestos en la secundaria, esas listas de problemas tipo que no tenían relación con la vida ordinaria en la que se desenvolvían y que no les han servido para nada en su utilización actual de las matemáticas (Barrantes y Blanco, 2006). Estas creencias pueden influir en el rendimiento e incluso en la motivación que tienen los alumnos hacia las matemáticas e incluso en la elección de las estrategias de resolución que el alumno aplica (Mayer, 1991).

En contraposición a la metodología tradicional, *la resolución de problemas* concibe los problemas como situaciones que se resuelven mediante un proceso razonado mediante el que se dan oportunidades a los alumnos para que se cuestionen, experimenten, hagan conjeturas y ofrezcan explicaciones, a la vez que va desarrollando competencias básicas como: la interacción con el mundo físico, tratamiento de la información, competencias digitales y de comunicación lingüística.

La resolución de problemas contribuyen a desarrollar en el alumno su propia autonomía e iniciativa personal en vertientes como son la planificación, la gestión de recursos y la valoración de resultados.

Desde la resolución de problemas se hacen también aportaciones a la competencia social y ciudadana a la hora de resolver problemas en equipo, contractando sus estrategias personales, comparando sus logros y sus fracasos con los puntos de vista de los otros compañeros.

Esta metodología hace que los alumnos se enfrenten a sus propios errores mediante tareas en las que necesitan com-

probar y reflexionar. Es preciso provocar conflictos en sus mentes que afiancen sus conocimientos y verifiquen la inconsistencia de algunas de sus ideas erróneas (Barrantes y Zapata, 2008).

4.- Principios didácticos de la resolución de problemas.

El punto de partida de la resolución de problemas debe ser el interés del alumno, es decir, debemos aprovechar las experiencias que el alumno tiene y el contexto en el que se desenvuelve para formular y resolver problemas que sean de su interés.

Así pues, los problemas deben estar relacionado con sus actividades cotidianas como son: la familia, la escuela, los compañeros, sus juegos, sus diversiones, sus preferencias,... También, es necesario que los problemas, en razón de la globalización de materias, se trabajen en relación con otras ramas de las matemáticas o con otras materias del curso.

Los problemas que se planteen deben resolver situaciones cotidianas de su entorno real y situaciones que resuelvan problemas físicos, relacionados con el mundo social o natural... Es preciso que el alumno conciba que la resolución de problemas es un instrumento importante en el desarrollo de su vida, tanto cotidiana como, en un futuro laboral. Esta metodología debe utilizarse para que sea posible el traspaso de los conocimientos matemáticos que se enseñan en el aula a los problemas que el alumno debe abordar fuera de ella.

Por otra parte, existe en la enseñanza de las matemáticas una separación importante entre la enseñanza de las operacio-

nes y la resolución de problemas. Las primeras se enseñan aisladas sin relacionarlas con los problemas, se aprenden de una manera mecánica, muchas veces sin comprensión y una vez que se mecanizan, es decir, el alumno las resuelve cómodamente, es cuando se aplican a la resolución de problemas.

Así cuando posteriormente, el alumno resuelve problemas, se enfrenta con una serie de preguntas que no es capaz de responder y que no asocia con las operaciones aprendidas, solo la experiencia posterior le da a conocer que tiene que aplicar alguna operación, por eso es típica la pregunta: ¿Es de sumar o de restar? Para estos alumnos los problemas son rompecabezas en los que casualmente se llega a la solución mediante la técnica de ensayo y error. Se concibe la resolución de problema como actividades de acierto y error, y no como actividades capaces de hacer razonar al individuo.

Los problemas deben ser actividades vivas que en la Educación Infantil y en los primeros cursos de la Educación Primaria deben ser presentados mediante una etapa manipulativa que, para los más pequeños, puede interpretarse como una etapa de dramatización en la que se escenifica el problema, como si fuera un cuento, y se van vivenciando todos los pormenores que indica el problema. En cursos superiores no es preciso la dramatización pero sí sería conveniente la acción con elementos simples como por ejemplo el uso de bolas. La dramatización o la acción de objetos simples hará que el alumno perciba de una manera concreta, mediante sus acciones, cuál es la operación necesaria para resolver el problema.

En todos los casos sería necesario que

el alumno fuera explicando lo que va haciendo para conseguir esa competencia básica referida a la utilización del lenguaje como instrumento de comunicación oral, de representación, interpretación y comprensión de la realidad, de construcción y comunicación del conocimiento y de organización y autorregulación del pensamiento, las emociones y la conducta.

Después, es conveniente realizar actividades gráficas, es decir, que el alumno haga dibujos, gráficos o esquemas que le ayuden a distinguir entre los datos útiles o no, de manera que comprenda de una forma más simplificada el problema y pueda tener una representación mental del mismo.

Todas estas actividades se deben hacer en grupo se debe incentivar su resolución en grupos, los alumnos aprenden de sus compañeros y en lugar de formularse preguntas a sí mismo, son capaces de formular esas mismas preguntas en voz alta para que los demás puedan resolvérselas. En grupo, el alumno en lugar de interiorizar explícita todo lo que conocen sobre el problema y su proceso de resolución; hay intercambio de ideas de las que pueden surgir distintos caminos para su resolución, que le puede enseñar a reconocer que un problema se puede resolver por varios métodos, todos ellos válidos. El compartir el problema con otros compañeros disminuye la carga de responsabilidad y la angustia que puede generar tener que enfrentarse solo con las dificultades, también, los éxitos o errores son compartidos por todos.

5.- Distintos tipos de problemas a proponer.

Así pues el objetivo de este trabajo es proponer a los profesores de Primaria una serie de problemas que sean la alternativa a aquellos problemas tipo; de forma que el alumno adquiera una serie de estrategias que le haga, en estos niveles básicos, un buen resolutor de problemas. Las estrategias y experiencias que el alumno adquiere con estos tipos de problemas pretendemos le sean imprescindibles en los problemas que se le planteen en la vida ordinaria o en los que encuentre en sus estudios posteriores.

En los siguientes apartados hacemos un desarrollo reflexivo sobre problemas divergentes, de cálculo mental y de estimación justificando la importancia que tienen en el currículo de Primaria y en la vida ordinaria.

También vamos a estudiar y proponer problemas que necesitan poner énfasis en la comprensión del texto, en el razonamiento o en la comprobación de la solución. Éstos contribuyen a desarrollar en él, su propia autonomía e iniciativa personal en aspectos como son la planificación, la gestión de recursos y la valoración de resultados, así como la posibilidad de utilizar las herramientas matemáticas básicas, comprender informaciones que utilizan soportes matemáticos y fomentar el desarrollo de su comunicación lingüística.

Por último, se proponen problemas de construcción del enunciado que contribuyen como los anteriores a su desarrollo personal en las competencias básicas.

5.1.- Problemas divergentes.

Los problemas divergentes son problemas totalmente abiertos en los que el alumno mismo busca los datos, el razonamiento de resolución, las técnicas operatorias correspondientes y la solución. Son problemas que permiten varias maneras de resolución, en las que el alumno toma sus propias decisiones y en consecuencia obtiene sus soluciones.

Generalmente los alumnos perciben los problemas como algo aburrido pues conciben la escuela como un lugar al que van a aprender y no como un lugar de diversión. Sin embargo, los problemas divergentes son bien acogidos pues suelen ser interesantes y asequibles, es decir, los alumnos se interesan en buscar la solución y además todos pueden hacer algo, desde los menos avanzados hasta los más dotados.

Estos problemas van a estar también muy relacionados con la atención a la diversidad pues dependiendo de la naturaleza del problema, éste puede ser planteado para observar diferentes niveles de conocimiento, de relación, de afectividad, etc.

Un ejemplo típico de este tipo de problemas es el siguiente:

Si tuvieras 30 euros ¿qué te comprarías?

El problema puede acotarse añadiendo “*sin que te sobre ni te falte nada*”.

Si analizamos un problema como éste podemos observar que es de enunciado sencillo y asequible a todos los alumnos pues la etapa de comprensión es prácticamente nula. Es un problema interesante, en el sentido de que el alumno se interesa enseguida por él y por su resolución.

Es un problema abierto en el que el alumno aporta los datos correspondientes, pero esos datos suelen ser de su propio interés y extraídos del entorno en el que se desenvuelve su vida ordinaria, pues, aunque sea de una forma ficticia, comprará aquellos objetos que más le gustan... unos elegirán ropas, otros música, otros deportes o varias de estas cosas a la vez. El profesor adquiere así una información adicional de las cosas preferidas por sus alumnos.

Las operaciones que realice el alumno se harán resolviendo un problema que es de su interés y comprobaremos que según el nivel matemático de los alumnos, el problema tendrá diferentes niveles de planteamiento y resolución. Esta información puede ser utilizada en la evaluación continua que debe hacer el profesor, pues le dará a conocer cuál es el ritmo con los que el alumno realiza su aprendizaje, podrá analizar las dificultades que éste tiene para comunicar lo encontrado y adquirir sus conocimientos, y valorar su predisposición, habilidades y capacidades inherentes o adquiridas.

Una variación de estos problemas consistiría en dar una serie de objetos con los que tenga que realizar distintas composiciones de datos.

Suponemos: el profesor dice a los alumnos que van a visitar una tienda de deportes. Les da una hoja de imágenes con diferentes objetos y sus precios, y les pregunta:

*¿Qué te comprarías con 40 euros?
¿qué te comprarías con 40 euros sin que te sobrara ni te faltara nada?*

También se pueden hacer problemas más sencillos como los siguientes:

- Si Ana compra la raqueta y el balón ¿Cuánto tiene que pagar?.

- ¿Cuánto cuesta más la camiseta que el pantalón?.

- Compró las pelotas de tenis, los calcetines y las zapatillas de deportes. Pago con un billete de 50 euros ¿cuánto me sobra?.

Podemos observar que mediante estas actividades, el alumno resuelve problemas y hace operaciones pero iguales a las que tendrá que realizar, el día de mañana, en su vida ordinaria.

5.2.- Problemas y ejercicios de cálculo mental.

Todas las últimas reformas del currículo de Primaria incluyen como un objetivo importante, enseñar a los alumnos distintas estrategias para el cálculo mental.

Entendemos por cálculo mental aquel que se realiza sin lápiz ni papel y que busca estrategias de resolución distintas a los algoritmos que se emplean con estos materiales.

La experiencia nos dice que el alumno no tiene estrategias específicas de cálculo mental por lo que recuerda y resuelve mediante el algoritmo escrito cuando tiene que realizar una cuenta mentalmente y con el consiguiente esfuerzo extra que supone realizar dicha actividad. La dificultad que entraña esta resolución le hace que en la mayoría de los casos opte por no resolver mentalmente salvo en casos excepcionales. Esto posiblemente le haga perder oportunidades que se le presentan en su vida cotidiana sobre todo en lo relacionado con la compra y venta de artículos.

Así pues, nuestro objetivo es que el alumno conozca diferentes ejercicios y problemas que le lleven a aprender estrategias para resolver problemas mediante cálculo mental. Estas estrategias están basadas en la aplicación de las propiedades de los números como la conmutativa, asociativa o distributiva entre otras.

Por ejemplo si le planteamos al alumno el siguiente problema:

Si tienes 12 lápices de colores y te regalan una caja de 24 lápices de colores. ¿Cuántos lápices tienes ahora? Resuélvelo con la mente sin lápiz ni papel.

Como la operación aritmética sería $12 + 24 = 36$ mediante cálculo mental podemos enseñar a los alumnos la estrategia de “sumar primero la segunda decena y luego las segundas unidades”, es decir, $12 + 24 = 12 + 20 + 4 = 32 + 4 = 36$ aplicando la descomposición del número. O también podemos “sumar primero las decenas y luego añadir las unidades” $12 + 24 = (10 + 20) + (2 + 4) = 30 + 6 = 36$ aplicando la descomposición de los números y la propiedad conmutativa.

Si ahora planteamos el siguiente problema:

Si Juan tiene 4 cromos, su madre le regalan 7 cromos y su tía 6 cromos ¿Cuántos cromos tiene? Resuelve por cálculo mental.

La operación aritmética sería $4 + 7 + 6 = 17$, mediante cálculo mental podemos enseñar a los alumnos la estrategia de que “sume primero los números que suman diez”

$4 + 7 + 6 = (4 + 6) + 7 = 10 + 7 = 17$ aplicando claramente la propiedad conmutativa.

El objetivo es que el alumno aprenda nuevas estrategias que son más idóneas que utilizar el algoritmo escrito mentalmente.

El aprendizaje de estas estrategias no deberá hacerse de una forma espontánea y aleatoria sino cuidadosamente planificada por el profesor mediante una serie de actividades y ejercicios. Así pues el problema anterior estaría incluido dentro de una serie de destrezas que podíamos denominar "Sumar diez" y que deberían ser aprendidas por los alumnos con actividades como "hacer que el alumno sume dígitos que sumen diez" por ejemplo:
 $6 + 4 = 10$ $9 + 1 = 10$ $8 + 2 = 10$
 $1 + 9 = 10$ $7 + 3 = 10$

El objetivo es que el alumno descubra los pares de números del 1 al 9 que suman 10. Después se puede reforzar con una actividad de búsqueda de un complemento que nos dé siempre 10:

¿Qué número falta para diez? $3 + d = 10$
 $4 + d = 10$

Para posteriormente realizar actividades como:

Suma estos números, pero sumando primero los que suman 10.

$6 + 7 + 4 = 17$ $9 + 1 + 3 = 13$
 $8 + 5 + 2 = 15$ $1 + 4 + 9 = 14$

Y plantear a los alumnos problemas en los que deba utilizar esta estrategia como el visto anteriormente.

Así pues, el objetivo sería plantear operaciones que comúnmente se hacen con la mente y buscar una estrategia para resolverla mentalmente que simplifiquen la obtención del resultado.

Por ejemplo con las operaciones de adición y sustracción podíamos buscar una estrategia para sumar o restar 99. Es fácil observar que la regla para sumar es "sumar 99 a un número mentalmente es equivalente a sumar 100 a dicho número y restarle después 1". Igualmente restar 99 equivale a restar 100 y sumar 1. Un problema de cálculo mental con esta operación sería el siguiente:

En una colecta para una excursión, primero recogimos 82 euros y luego 99 euros. ¿Cuántos euros hemos recogido? Realiza el problema sin lápiz, ni papel, es decir, sólo con la mente. Explica con tus palabras como lo has resuelto.

Debemos intentar que los alumnos descubran la estrategia para realizar estas operaciones mentalmente, primero individualmente o en pequeños grupos, y después como una actividad de gran grupo, donde presentamos las estrategias obtenidas, si hay varias, y analizamos con ellos cuál o cuáles nos parecen más útiles.

En la tabla 1, presentamos algunas operaciones de las que es fácil deducir una regla para calcularlas mentalmente, la actividad para cada una de ellas sería buscar la regla, poner un ejemplo numérico que muestre la regla y elaborar un problema en el que se utilice dicha operación. Esta tabla aunque recoge un buen número de operaciones no significa que sean todas, por lo que podríamos investigar otras operaciones en las que podamos encontrar una estrategia para resolver mediante cálculo mental.

Tabla 1.

Sumar o restar, 100, 101, 29, 190	Sumar o restar decenas, centenas o millares	Multiplicar un número por 9, 99, 999,...
Multiplicar por decenas (10, 20, 30,...)	Multiplicar por centenas (100, 200, 300,...)	Multiplicar por millares (1000, 2000, 3000,...)
Multiplicar por 11, 21, 31,...	Multiplicar por 5, 50, 25, 250	Multiplicar por 21, 31, 41,...
Multiplicar por 101, 1001,...	Dividir entre 100, 1000, ...números terminados en 0	Dividir entre 4, 20, 5, 50,...
Multiplicar y dividir por 0.5, 0.25, 0.75	Multiplicar y dividir por 0.1, 0.01, 0.001,...	Multiplicar y dividir por 1,5

Si planteamos problemas para resolver mediante cálculo mental a los alumnos, en los que aprendan las estrategias correspondientes, crearemos en su mente una red lo suficientemente rica en recursos para poder resolver otras actividades de cálculo mental que se le pueden plantear en sus estudios posteriores o en su vida cotidiana.

5.3.- Problemas de estimación.

La resolución por estimación está muy ligada a la resolución mental ya que la mayoría de las veces hacemos estimaciones con cálculos mentales.

Es verdad que en la vida diaria, hay muchas situaciones en las que no nos interesa saber el valor exacto de una operación, por ejemplo, si una persona va a comprar latas de conservas que se le ofrece en paquetes de 3 latas que tienen precios distintos, el cliente no busca el precio exacto de la lata sino más bien quiere saber qué unidad es más barata para llevarse uno u otro paquete.

Igualmente ocurre si un alumno orga-

niza una fiesta de cumpleaños en el que se consumen varias bebidas y comidas propias como: hamburguesas, patatas, helados etc. Dicho alumno tiene un dinero para pagar, por lo que está interesado por el coste total de lo consumido, pero no de una manera exacta, pues su interés está más en saber si tendrá suficiente dinero para pagar. Por tanto, el alumno está interesado en hacer una buena estimación mental y para ello tendrá que utilizar las estrategias que conozca o haya aprendido tanto de estimación como de cálculo mental.

Estos son algunos ejemplos que nos muestra que la resolución de problemas por estimación es muy conveniente comenzarla en la educación Primaria.

Sin embargo, la estimación es un recurso que tenemos que enseñar a los alumnos, no solamente para la utilización en su vida ordinaria, sino como una forma de comprobar en cualquier problema las soluciones a las que queremos llegar. La estimación muchas veces les puede dar pistas importantes que les aseguren

que van por buen camino o que por el contrario tienen que cambiar de estrategia porque las soluciones estimadas y las calculadas no coincidan.

Centrándonos ya en la estimación de problemas numéricos, el objetivo es hacer comprender a los alumnos que la resolución por estimación de una operación consiste en aproximar los operandos a valores que faciliten el resultado aproximado de una forma sencilla. Así por ejemplo, si tenemos que calcular la suma de 39, 81 y 52 aproximamos los sumandos a 40, 80 y 50, y obtenemos el resultado por estimación que sería 170. Podemos observar que el resultado exacto sería 172 por lo que podríamos considerar que hemos hecho una buena estimación.

El alumno debe aprender estrategias que les enseñen a resolver los problemas por este método que consiste en aproximar los números correspondientes a números más sencillos de operar como pueden ser los múltiplos de 10. Para ello habrán de realizar ejercicios de aproximaciones a unidades, decenas, centenas, ..., décimas, centésimas, etc. y como se aplican estas aproximaciones a los problemas.

Los alumnos tienen que observar que si la estimación de las operaciones se hacen todas por exceso o todas por defecto se obtienen peores estimaciones. Por ejemplo:

Sumar 27, 75, 55, 82.

Si estimamos por exceso todas las cantidades obtenemos 30, 80, 60, 90 y de resultado 260. Si estimamos por defecto sería 20, 70, 50, 80 que da 220. Si estimamos por exceso 27 y 75, y los otros números por defecto tendríamos 30, 80, 50, 80 que nos daría 240, que es mejor

estimación ya que el resultado exacto es 239.

Deben aprender a realizar buenas estimaciones, calculando mentalmente el valor aproximado pero deben, también explicar cuál es la mejor estrategia de resolución fomentando así el desarrollo de la competencia lingüística en lo que se refiere a las matemáticas.

5.4.- Problemas relacionados con la comprensión del texto.

En las etapas para la resolución de problemas según Polya y demás autores hemos observado que es primordial para resolver el problema, comprender el texto del problema. Para muchos alumnos el primer obstáculo que encuentran en la resolución, es la dificultad sintáctica del lenguaje utilizado, en el que puede haber palabras que no conozca.

Tenemos que tener en cuenta que el lenguaje de los problemas difiere y tiene semejanzas con el ordinario. El lenguaje matemático es un lenguaje que busca la precisión y la exactitud y tiene una total ausencia de elementos actitudinales; como opiniones personales o sentimentales. En este lenguaje puede haber vocabulario específico o nociones matemáticas desconocidas por el alumno. Así pues, la utilización simultánea del lenguaje escrito ordinario con el lenguaje matemático de variables, números, signos, ... suele ser un elemento favorecedor de la comprensión del enunciado. También puede ocurrir que el alumno no sea capaz de relacionar las matemáticas con el contexto del problema (Macnab y Cummine, 1992). Otras veces, los datos irrelevantes, el número de operaciones o el tamaño de los números pueden ser los

causantes de que el alumno no haga una representación mental adecuada del problema.

Para evitar todos estos inconvenientes, el alumno debe leer el texto detenidamente aunque en una primera lectura es difícil que sea capaz de comprender el problema completo. Los problemas se caracterizan por ser sincréticos en su inicio y es necesario un proceso de análisis y síntesis para poder llegar a una completa asimilación de su enunciado. Por eso, la primera lectura se presenta de una forma global en la que el alumno no es capaz de separar las partes y es necesario realizar una nueva lectura más calmada en la que vaya separando las distintas partes en las que se divide el problema. El alumno debe ser capaz de comprender dichas partes independientemente y relacionarlas con las otras que conforman el enunciado total.

A veces es necesario que el alumno explique el texto a los compañeros reconociendo cuáles son los datos útiles de los que no lo son, identificando qué tenemos que resolver, es decir, saber cuál es la incógnita, etc.

Los problemas que presentamos a continuación tienen como objetivo conseguir que el alumno perciba que es necesario comprender el problema para resolverlo. Cuando el alumno no comprende el enunciado maneja los datos de una forma automática y sin sentido, así multiplica siempre si observa que todos los problemas son de multiplicar o opera según le indican los verbos de acción de los problemas, por ejemplo si el problema habla de "quitar" entonces siempre resta los datos.

Los problemas, pues, en los que es

necesario comprender el texto pueden ser problemas en los que faltan datos o sobran datos como:

Antonio tenía 15 euros. El día de su cumpleaños su madre le regala 4 golosinas. Si gasta 7 euros en invitar a sus amigos ¿Cuánto dinero le quedará?

Marisa ha participado en una marcha atlética de 40 km que ha recorrido en 3 horas. Si recorrió 20 km en la primera hora ¿Cuántos km recorrió en la tercera hora?

Este tipo de problemas también les acerca a la realidad de la vida ordinaria en la que tenemos más datos de los que necesitamos para resolver un problema y tenemos que identificar cuál es la información que se necesita para solucionarlo, aunque en otros casos lo que nos faltan son datos y necesitamos buscarlos.

También, pueden ser problema mal formulados, es decir, problemas que el alumno empieza a resolver, pero en un momento dado se da cuenta que los datos no son coherentes con la pregunta que le hace el problema, es decir no es posible dar una solución. Por ejemplo:

Con un depósito de 250 litros de agua mineral se han llenado 190 botellas de un litro y medio de capacidad ¿Cuántos litros de agua quedan en el depósito?

Podemos comprobar que se necesita más de 250 litros de agua para llenar 190 botellas de un litro y medio, por lo que el enunciado del problema no está bien formulado. En estos casos el alumno se tiene que dar cuenta que no hay solución viable, en cuyo caso se le recomienda inventar los datos para que el problema sea coherente y tenga una solución.

También pueden ser problemas de

situaciones especiales en los que se presentan situaciones extrañas o de falsas relaciones como:

Si tengo 25 cromos y gasto 7 euros. ¿Cuántos cromos me quedan?

Si un jugador anota 20 puntos en 5 minutos. ¿Cuántos puntos anotará en 10 minutos?

Todos estos problemas aunque de enunciados sencillos necesitan que el alumno tenga que comprender el texto para resolverlos y no actuar de una forma automática como ya hemos comentado. También, colaboran en el desarrollo de la competencia lingüística ampliando su conocimiento lingüístico y semántico, y favorecen el conocimiento esquemático, conocimiento que no sólo es básico para la comprensión del problema, pues un buen esquema le da siempre trazas para avanzar en la resolución del problema.

5.5.- Problemas para razonar.

Igualmente que en los problemas anteriores nuestro objetivo principal era fijarse en la comprensión del texto, nos interesa también formular una serie de problemas en los que nos centramos más en el procedimiento, en lo que Polya denomina *planificación*.

Planificar es realizar un razonamiento, es decir, son una serie de ideas (procesos lógicos) que indican como se puede resolver el problema. Diversos autores han demostrado que no todos los problemas son de la misma complejidad. Por ejemplo, Mayer (1991) considera que los problemas en los que se operan dos elementos que no cambian tienen menos dificultad que aquellos problemas en los que el alumno tiene que hacer una compa-

ración mediante expresiones como *más que* o *menos que*. Para Tomás (1990), los problemas de varias preguntas a una situación de partida o varias preguntas en las que hay que deducir información a partir de los datos dados, plantean mayor dificultad para los alumnos que los que se sólo hacen una pregunta de forma directa o indirecta explícita.

Así pues, debemos dar posibilidades a los alumnos para que planifiquen aprendiendo a darse cuenta que algunos recursos algorítmicos o heurísticos que conoce no es capaz de usarlos en un problema concreto, a veces, ni son consciente de que esos recursos pueden ser utilizados. El profesor debe enseñar a sus alumnos a utilizar la estimación como un recurso para seguir o cambiar de estrategia según sean los datos obtenidos por dicha estimación.

La estrategia puede llegar por la experiencia adquirida en la resolución de problemas análogos al planteado o bien mediante diferentes ensayos en los que la intuición le da la idea feliz para la resolución. A veces es primordial el dialogo entre compañeros de grupo o bien mediante cuestiones que le va planteando el profesor para guiarlo hacia la resolución.

Así, el profesor debe ayudar a aquel alumno que sabe realizar el problema pero no es capaz de explicar los pasos seguidos o si se equivoca en algún paso, necesita ayuda para comprender por qué se ha equivocado. El profesor debe también colaborar en que el alumno reflexione y no resuelva rápidamente mediante un procedimiento que ya ha automatizado que puede no ser el idóneo para ese problema. El profesor debe hacerle reflexionar cuando un determinado camino no le

está llevando a la solución y se estanca en él y no tiene iniciativa para buscar otras opciones.

Teniendo en cuenta todos estos comentarios, un tipo de problemas que favorece el desarrollo de esta etapa son aquellos problemas en los que suprimimos los datos numéricos. El alumno debe elaborar la posible estrategia que le va a llevar a la solución del problema pero sin utilizar cantidades. Por ejemplo:

Si supiéramos lo que cuesta una libreta ¿cómo calcularíamos lo que cuestan cinco libretas? ¿y lo que cuestan varias?

Si supiéramos lo que cuestan 5 entradas de fondo de fútbol ¿cómo calcularías lo que cuesta una?

Si queremos viajar de Badajoz a Madrid. ¿cuánto nos costaría el viaje?

Los dos primeros problemas son problemas específicos para desarrollar el razonamiento que les lleva a la solución. El tercero es un problema con este mismo objetivo pero que se plantea de una forma más abierta. Primero tienen que decir cuál es el medio de locomoción que van a utilizar. Si se deciden por transportes públicos tendrán que averiguar los distintos precios, si viajan en un coche particular hay que conocer el valor de combustible, que pueden ser varios precios. Tienen que saber también, los kilómetros a Madrid y luego hacer operaciones.

Es posible que si el profesor hace una puesta en común para mostrar a todos las diferentes soluciones, descubrirá que los alumnos le dan alguna otra forma de hacer el viaje, como en bicicleta, en cuyo caso habrá que contabilizar otros gastos como la manutención, etc. Podemos observar que es un problema abierto que

reúne todas las características de este tipo de problemas que comentamos anteriormente.

Estos problemas ayudan al alumno a saber traducir las ideas del razonamiento en término de operaciones. Es decir, para llevar a cabo sus ideas utiliza las distintas operaciones y sus técnicas operatorias para llegar a la solución; la dificultad está en asociar a la idea una o varias operaciones que la materialicen y le lleven al resultado deseado. Puede ocurrir que los alumnos sean capaces de resolver el problema razonadamente pero no sean capaces de asociar las ideas lógicas con los algoritmos operatorios correspondientes. En este caso es preciso, reeducar al alumno en el significado de las distintas operaciones aritméticas y trabajar los verbos de acción y palabras de la vida ordinaria asociadas a esa operación.

Por otra parte, puede ocurrir que en algunos problemas sea conveniente acudir a la aplicación del método analógico. El alumno no es capaz de descubrir el método de resolución de un problema porque las cantidades numéricas de los datos son números grandes, y sin embargo es capaz de hacer los mismos problemas con otras cantidades más pequeñas. Ya dijimos en el apartado anterior que el tamaño de los números disminuía las probabilidades de resolver con éxito el problema.

Por ejemplo, el alumno no es capaz de encontrar el método de resolución del problema:

Una casa de 90,75 metros cuadrados cuesta 180.345 euros ¿Qué precio tiene un metro cuadrado?

Y sin embargo es capaz de resolver el problema:

Una casa de 10 metros cuadrados cuesta 200 euros ¿Qué precio tiene un metro cuadrado?.

Otro tipo de problemas que también contribuye a que los alumnos aprendan a razonar son aquellos que podemos denominar *empieza el problema por el final*. Normalmente el alumno suele traducir literalmente el problema y sigue el orden de resolución que le marcan las distintas frases del texto. Por ello, el profesor debe plantearle problemas en los que la mejor estrategia para encontrar la solución es empezar por el final e ir leyendo hacia atrás las frases. Por ejemplo:

Marcos y German compraron un rollo de cuerda para construirse un columpio, el primero utilizó la mitad y German las dos terceras partes de lo que quedaba. Al final sobraron 10 metros de cuerda. ¿Cuánto medía el rollo de cuerda que compraron?

El razonamiento que el alumno debe hacer para la resolución de este problema pasa por construir un esquema lineal en el que observemos cuáles son las distintas partes en la que hemos dividido la cuerda pero empezando por los datos del final.

En este esquema podemos extraer el razonamiento que lleva a la solución. Observamos que para resolver tenemos que utilizar primeramente los 10 metros que sobran para averiguar cuánta cuerda utiliza Germán. Pues si éste cogió los dos tercios, cogió el doble de lo que dejó, estos metros sumados nos dan la mitad de la cuerda que son los metros que cogió Marcos. El doble de lo que cogió Marcos es lo que medía la cuerda. La cuerda medía 60 metros.

Este es pues una forma de razonar distinta a la que el alumno está acostumbrado, pues ya desde los primeros cursos, los datos suelen aparecer ordenados según se van a utilizar, todo lo contrario a lo que ocurre en estos problemas donde ese hábito de datos ordenados se rompe totalmente.

Nos parece importante resaltar como ayuda la realización de un pequeño esquema gráfico, como en este problema, para una mayor concretización de lo que deseamos resolver.

En los niveles medio y superiores de Primaria sería conveniente que el profesor enseñara al alumno a esquematizar los enunciados de distintos problemas, bien mediante conjuntos, esquemas lineales, bocetos de dibujos,... El objetivo es que el alumno utilice este recurso en la realización de sus problemas, pues es un recurso clarificador y facilitador en muchas ocasiones de la solución del problema.

En resumen, en esta fase de planificación debemos desarrollar en los alumnos, el conocimiento estratégico o conocimiento de estrategias generales de resolución de problemas que ayudan a llegar a la solución, como son: comprender bien el problema, trazar esquemas, buscar problemas similares, intentar transformar el problema en otro más sencillo o cuya solución conozca, descomponerlo en partes que pueda resolver, convertirlo en otro más general, etc. (Juidías y Rodríguez, 2007).

5.6.- Problemas relacionados con la solución.

La última etapa que Polya denomina de *supervisión* es más bien una etapa en la que el alumno da la solución corres-

pondiente y el profesor le invita a que compruebe que la solución es idónea para ese problema. De esta forma el alumno vuelve a analizar el proceso hacia atrás lo que le hace afianzar más aún la comprensión y asimilación del problema en todas sus fases.

Normalmente este último paso es olvidado u omitido por el profesor y, por tanto por el alumno, de forma que no se convierte en un hábito el comprobar, aunque sea mediante una somera estimación, que los resultados se adaptan a los datos dados.

Por ello, consideramos que es importante plantear una serie de problemas en los que la comprobación de la solución sea necesaria para resolver correctamente el problema. Por ejemplo:

En clase de Juan van a colocar 6 armarios de 1,25 metros de longitud en una pared que mide 10 metros de anchura. Juan dice que esto no es posible porque ha resuelto el problema y le sale que se necesita una pared de 75 metros para poner los armarios ¿tiene Juan razón?, si no la tiene ¿podrías averiguar porqué ha obtenido Juan esa solución?

Podemos observar que si los alumnos intentan solucionar el problema multiplicarán 1,25 por 6 y obtendrán 7,50 metros, es decir que Juan no tenía razón. Parece que es fácil que los alumnos descubran que Juan se ha equivocado porque no ha hecho bien la separación entre entero y decimales, es decir, no ha corrido la coma dos lugares hacia la izquierda.

Una vez resuelto el problema el profesor debe hacer hincapié en la importancia que tiene el comprobar si la solución es razonable, si Juan hubiera hecho la estimación de que 6 armarios de poco

más de 1 metro no pueden llegar a medir 75 metros, es probable que hubiera corregido su solución.

Los problemas que planteemos para este apartado pueden estar relacionados con los errores que más comúnmente cometen los alumnos, como los errores de encolumnamiento. Por ejemplo, en el siguiente problema, la niña coloca mal las unidades, décimas y centésimas para sumar.

Encarna afirma que ha unido tres trozos de cuerda de 5,25 metros, 7,3 metros y 2,55 metros y que el resultado obtenido ha sido 8,53 metros. Repasa la solución, detecta el error y corrígelo.

Tiene error de encolumnamiento pues suma los 7,3 metros colocándolos debajo de los 25 centímetros y encima de los 55 centímetros, sin tener en cuenta si son decimas, unidades o decenas, por eso le sale la solución 8,53. Podemos observar que una estimación en la que el alumno sumara las unidades sería suficiente para descubrir que la solución no es la correcta.

5.7.- Problemas de redactar enunciados.

Para que los alumnos sean capaces de comprender y asimilar las etapas que implica la resolución de problemas, sería conveniente que colaborara también en la construcción de los problemas de diversas maneras como pueden ser :

a) Problemas en los que dadas las operaciones, el alumno tiene que redactar, verbalmente o por escrito un enunciado de un problema cuya resolución sean las operaciones dadas. Podemos dar al alumno una sola operación o bien podemos darle dos operaciones que pueden ser la

misma o distintas, en este último caso también pueden ser operaciones aritméticas inversas (suma y resta, multiplicación y división).

Por ejemplo:

$$1695 - 745 = 950 \text{ y } 950 / 5 = 190.$$

Plantea un problema relacionado el deporte que más te guste.

b) Dadas las preguntas o las cuestiones, el alumno tiene igualmente que redactar los enunciados de los problemas. Por ejemplo:

¿cuánto dinero tendrá que poner cada niño? ¿a cuánto toca cada uno? Plantea un problema.

c) Dados los datos que los alumnos formulen las preguntas. Por ejemplo:

Antonio ha ido al cine con sus compañeros y compañeras de clase. En total son 23 niños y niñas. Todas las entradas les han costado 145 euros y 75 céntimos. Formula la posible pregunta y amplía el problema para que se pueda hacer otra pregunta.

En todos los casos se pretende familiarizar al alumno con la construcción de un problema, desarrollando así la competencia *tratamiento de la información*, pues el alumno debe desarrollar destrezas que están asociadas al uso de los números, tales como la comparación, la aproximación o las relaciones entre las diferentes formas de expresarlos, lo que le ayuda en el conocimiento de las cantidades y las medidas.

La construcción de los problemas contribuye también a desarrollar la competencia autonomía e iniciativa personal desde el momento que el alumno tiene que hacer una planificación, asociada a la

comprensión en detalle de la situación planteada, tomando decisiones. También la posibilidad de utilizar las herramientas matemáticas básicas o comprender informaciones que utilizan soportes matemáticos le hace desarrollar la competencia aprender a aprender. Y por último, dominar el lenguaje y el vocabulario matemático para construir los enunciados hace que este tipo de actividades fomente el desarrollo de la competencia en comunicación lingüística.

Podremos comprobar que el tipo de problema que el alumno construye dependerá de los conocimientos matemáticos que tenga, pero también, su desarrollo en la lectura y la escritura. Estas actividades nos darán mucha información sobre el nivel de conocimiento del alumno en estos campos, pues los mejores formados tendrán mayor capacidad para hacer problemas con un correcto enunciado y una buena estructura matemática.

6.- Conclusiones.

La resolución de problemas es un potente recurso metodológico que contribuye a desarrollar diferentes capacidades y competencias en los alumnos. Pero si esta resolución de problemas es el eje de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en el aula, será preciso que los alumnos desde temprana edad comiencen a resolver problemas para aprender a aplicar diferentes estrategias e incluso poder plantear ellos, esos mismos problemas.

Nuestra idea es hacer que los alumnos sean buenos resolutores de problemas pero no en el sentido de que sepan resolver diferentes tipos de problemas, sino que la resolución de esos problemas les suminis-

tre una red de estrategias que sea válida para resolver o afrontar otros problemas. El alumno no debe quedarse solamente con la respuesta concreta sino adquirir una visión más general de la solución.

Para ello, el profesor debe tener una colección suficiente de problemas variados y diferenciados que le ayuden a conseguir este objetivo. Por ejemplo, dentro del contexto, los alumnos deben resolver problemas relacionados con su vida cotidiana, pero también otro tipo de problemas simulados o claramente matemáticos, con una o varias soluciones o sin solución que motiven al alumno y le animen a resolverlos.

Siguiendo las etapas de Polya consideramos que los problemas no deben centrarse sobre las operaciones y la obtención de la solución exacta, sino que deben estar orientados a aprender a comprender el texto, a asimilar el proceso de resolución o a interpretar las soluciones.

Se deben plantear problemas lo más abiertos posibles y enseñar al alumno suficientes estrategias para poder aplicar el cálculo mental y la estimación, en su vida ordinaria, de una forma satisfactoria en el sentido de que adquieran buenos hábitos en su utilización. Los alumnos deben comprender, también, que la estimación es una forma de comprobar en cualquier problema las soluciones a las que queremos llegar.

El papel del profesor pasa por animar a los alumnos a comunicar de forma escrita o de forma oral, las explicaciones del proceso seguido para la obtención de las soluciones desarrollando así la competencia lingüística. Debe también estimular y provocar momentos en los que el

alumnado mediante una puesta en común confronte sus métodos de resolución y evalúe cuáles son más óptimos.

El profesor debe proponer problemas, que puedan crear en los alumnos capacidades de investigación y, que desarrollen la competencia social y ciudadana, es decir problemas cuyos procesos de resolución estimulen la relación del alumnado consigo mismo. El trabajo en equipo adquiere una dimensión singular si se aprende a aceptar otros puntos de vista distintos al propio, en particular cuando se utilizan estrategias personales de resolución de problemas. Las puestas en común también favorecen el desarrollo de esa competencia.

La evaluación debe ser para el profesor un instrumento que guíe su enseñanza en función de los datos que ésta le proporciona sobre los aprendizajes de los alumnos y los que puede adquirir. La evaluación dará a conocer al profesor las condiciones y ritmos con los que el alumno realiza su aprendizaje, analizar los problemas que éste tiene para explicar y adquirir sus conocimientos y valorar sus predisposiciones, habilidades y capacidades.

En síntesis, el objetivo es que un alumno frente a un problema tenga suficientes estrategias para resolverlo y si éstas le fallan pueda reconsiderarlo y observarlo desde otras perspectivas desde las que pueda avanzar hacia la solución. Resolver problemas es enseñar a planificar y esa planificación aplicada a la vida ordinaria le ayudará a desarrollarse mejor como persona en su vida.

Los alumnos que son buenos resolutores de problemas no sólo se caracterizan por los conocimientos, técnicas,

estrategias, ... que poseen, sino por la buena organización de éstos, en sus esquemas mentales, de forma que ante cualquier situación problemática acceden rápidamente a ellos pudiendo resolver el problema.

Referencias bibliográficas.

- BARRANTES, M y BLANCO, L. J. A study of prospective Primary teacher's conceptions of teaching and learning geometry. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 2006, v.9, n. 5, p.411-436.
- BARRANTES, M. y ZAPATA, M. Obstáculos y errores en la enseñanza-aprendizaje de las figuras geométricas. *Campo Abierto*. 2008, Volumen 27, n.1, p.55-71.
- CURRÍCULUM DE EDUCACIÓN PRIMARIA. D.O.E. nº 50. Conserjería de Educación. Decreto 82/2007, 24 de abril. Currículo de Educación Primaria para la Comunidad Autónoma de Extremadura. 2007.
- JUIDÍAS, J. y RODRÍGUEZ, I. R. Dificultades de aprendizaje e intervención psicopedagógica en la resolución de problemas matemáticos. *Revista de Educación*, 2007, n. 342, p. 257-286.
- MACNAB, D. S. y CUMMINE, J. A. *La enseñanza de las matemáticas de 11 a 16 años: Un enfoque centrado en la dificultad*. Madrid: Visor. 1992.
- MAYER, R.E. *Thinking, problem solving, cognition*. New York: Freeman . 1991.
- MONTAGUE, M. (1988): Strategy instruction and mathematical problem solving. *Journal Reading, Writing and Learning Disabilities*, 998, n. 4, p. 275-290
- ORTON, A. *Didáctica de las matemáticas*. Madrid: Ediciones Morata/MEC. 1990.
- PINO, J. y BLANCO, L. J. Análisis de algunos métodos que emplean los estudiantes al resolver problemas matemáticos con varias formas de solución. *Publicaciones*, 2008, n.38, p.63-88.
- POLYA, G. *How to solve it*. Princenton , N. J.: Princenton University Press. 1945.
- SCHOENFELD. Explicit Heuristic Training as a Variable in Problem-Solving Performance. *Journal for Research in Mathematics Education*, 1979, n.10(3), p.173-187
- TOMÁS, M. didáctica.

