CONTRIBUCIONES CIENTÍFICAS
EN HONOR DE MIRIAN ANDRÉS GÓMEZ
(Laureano Lambán, Ana Romero y Julio Rubio, editores),
Servicio de Publicaciones, Universidad de La Rioja,
Logroño, Spain, 2010.

ACERCA DE UNA CARACTERIZACIÓN ALGEBRAICA DE LA TORSIÓN DE UNA CONEXIÓN AFÍN PLANA

PILAR BENITO, CLARA JIMÉNEZ GESTAL, SARA MADARIAGA MERINO Y JOSÉ M. PÉREZ IZQUIERDO

Dedicado a la memoria de Mirian Andrés Gómez

"(...) un lazo local analítico es una extensión del concepto de grupo de Lie local"
Para facilitar la extensión necesitamos lazos, tan naturales que a veces nos pasan desapercibidos y que nos resultan imprescindibles cuando notamos su ausencia.

Resumen. Los teoremas de Lie para grupos de Lie locales fueron extendidos al caso no-asociativo por Mikheev y Sabinin. Posteriormente, Mostovy y Pérez-Izquierdo dieron una versión formal del trabajo de Mikheev y Sabinin en el contexto de los lazos formales. El punto crucial en el trabajo de Mikheev y Sabinin es la caracterización del operador de torsión de una conexión afín plana en términos de operaciones multilineales. En este artículo, presentamos una aproximación directa a esta caracterización y completamos algunos detalles en el trabajo de Mostovoy y Pérez-Izquierdo. Obtenemos también una estructura de grupo no-abeliano en el conjunto de conexiones formales afines planas.

Abstract. Lie theorems for local Lie groups were extended to a nonassociative setting by Mikheev and Sabinin. Later, Mostovy and Pérez-Izquierdo gave a formal version of the work of Mikheev and Sabinin in the context of formal loops. The crucial point in the work of Mikheev and Sabinin is the characterization of the torsion operator of a flat affine connection in terms of multilinear operations. In this paper we present a direct approach to this characterization and complete some details in the work of Mostovoy and Pérez-Izquierdo. We also obtain a structure of non-abelian group on the set of formal flat affine connections.

1. Introducción

En este artículo el cuerpo base k se asumirá siempre de característica cero.

La correspondencia entre grupos locales de Lie y álgebras de Lie fue considerada por primera vez en un contexto no asociativo en 1955 por Malcev [5]. En dicho

2000 *Mathematics Subject Classification.* 17D99.
Key words and phrases. Flat affine connections, Sabinin algebras.
Esta investigación está parcialmente financiada por el proyecto MTM 2007-67884-C04-3 del Ministerio de Educación y Ciencia y el fondo FEDER. Sara Madariaga agradece también la financiación del MICINN a través de la beca AP2007-01986 y la de la Universidad de La Rioja mediante la ATUR 09/22.

artículo, Malcev probó que el espacio tangente en el elemento identidad de un lazo de Moufang local y analítico es lo que actualmente se conoce como un álgebra de Malcev, es decir, un álgebra $(M, [\,,\,])$ anticonmutativa que satisface la identidad

$$J(x, y, [x, z]) = [J(x, y, z), x]$$

donde $J(x, y, z) = [[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y]$. En 1971 Kuzmin [4] demostró que toda álgebra real de Malcev de dimensión finita aparece de este modo, quedando así establecida la correspondencia de Lie para lazos de Moufang. Durante los siguientes años distintos matemáticos investigaron la correspondencia de Lie en variedades más generales de lazos locales analíticos como por ejemplo la variedad de lazos de Bol. En 1982 Hofmann y Strambach [3] proporcionan una versión parcial para lazos locales analíticos arbitrarios basada en lo que posteriormente se ha denominado álgebras de Akivis. Finalmente, es en 1987 cuando Mikheev y Sabinin [10] logran establecer con completa generalidad la correspondencia de Lie para lazos locales analíticos. Animamos al lector interesado a consultar la excelente monografía aparecida en 2006 de la mano de Akivis y Goldberg [1] donde se expone en particular la evolución de este problema.

El resultado fundamental de Mikheev y Sabinin al que hacemos referencia se enuncia del siguiente modo:

Teorema 1 (Mikheev y Sabinin, 1987). *El espacio tangente en el elemento identidad de un lazo local analítico es un álgebra de Sabinin, y cualquier álgebra de Sabinin real de dimensión finita que satisface ciertas condiciones de convergencia* [10] *puede interpretarse como el espacio tangente de un lazo local analítico.*

Antes de discutir la estrategia de Mikheev y Sabinin, introduciremos los ingredientes básicos presentes en el enunciado del Teorema 1, que no son más que el concepto de lazo local analítico y el de álgebra de Sabinin.

Una variedad analítica Q junto con un punto destacado e se dice lazo analítico local si en un entorno U de e existe una aplicación analítica $F\colon U \times U \to Q$ tal que $F(e, x) = x = F(x, e)$ para todo $x \in U$. El elemento e se dice elemento identidad del lazo. Existe una clara noción de equivalencia entre lazos locales que permite restringir el entorno U y que omitiremos por simplicidad. La multiplicación F se puede iterar siempre que los elementos sobre los que se aplica pertenezcan a un entorno suficientemente pequeño de e.

Un espacio vectorial V dotado de dos familias de operaciones multilineales $\langle x_1, \dots, x_n; y, z\rangle$ $(n \geq 0)$ y $\Phi(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m)$ $(n \geq 1, m \geq 2)$ $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m \in V$ se dice *álgebra de Sabinin* si se cumple que

$$\Phi(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m) = \Phi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}; y_{\tau(1)}, \dots, y_{\tau(m)}) \tag{1}$$

para todas las permutaciones $\sigma \in \Sigma_n$, $\tau \in \Sigma_m$ y además

$$\langle x_1, \dots, x_n; y, z\rangle = -\langle x_1, \dots, x_n; z, y\rangle \tag{2}$$

$$\sigma_{x,y,z}\left(\langle x_1,\ldots,x_r,x;y,z\rangle + \sum_{k=0}^{r}\sum_{\alpha}\langle x_{\alpha_1},\ldots,x_{\alpha_k};\langle x_{\alpha_{k+1}},\ldots,x_{\alpha_r};y,z\rangle,x\rangle\right)=0 \tag{3}$$

$$\langle x_1,\ldots,x_r,a,b,x_{r+1},\ldots,x_n;y,z\rangle-\langle x_1,\ldots,x_r,b,a,x_{r+1},\ldots,x_n;y,z\rangle + \sum_{k=0}^{r}\sum_{\alpha}\langle x_{\alpha_1},\ldots,x_{\alpha_k},\langle x_{\alpha_{k+1}},\ldots,x_{\alpha_r};a,b\rangle,\ldots,x_n;y,z\rangle=0 \tag{4}$$

donde $\sigma_{x,y,z}$ denota la suma cíclica en x,y,z y α recorre todas las permutaciones $i\mapsto\alpha_i$ tales que, una vez fijado k, $\alpha_1\leq\cdots\leq\alpha_k$, $\alpha_{k+1}\leq\cdots\leq\alpha_r$ (permutaciones de barajado).

A primera vista quizás la definición de álgebra de Sabinin pueda parecer algo técnica, pero si se considera

$$\langle x_1,\ldots,x_n;y,z\rangle=0=\Phi(x_1,\ldots,x_n;y_1,\ldots,y_m)$$

para $n\geq 1, m\geq 2$, de las dos familias de operaciones solamente queda una operación bilineal $\langle y,z\rangle$ que por las identidades (2) y (3) es un álgebra de Lie. Recíprocamente, cualquier álgebra de Lie se puede ver como un álgebra de Sabinin de este modo. Por tanto las álgebras de Sabinin son simplemente una extensión del concepto de álgebra de Lie, de la misma manera que un lazo local analítico es una extensión del concepto de grupo de Lie local. Las álgebras de Malcev son también ejemplos de álgebras de Sabinin en las cuales todas las operaciones $\langle x_1,\ldots,x_n;y,z\rangle$ pueden reconstruirse a partir de un producto binario $[y,z]$ mientras que las operaciones $\Phi(x_1,\ldots,x_n;y_1,\ldots,y_m)$ son nulas. Del mismo modo que a partir de un álgebra asociativa se construye un álgebra de Lie cambiando el producto asociativo xy por el producto conmutador $xy-yx$, a partir del producto de cualquier álgebra no asociativa se puede definir un álgebra de Sabinin [11].

Resulta sorprendente, aunque natural cuando se comprende la construcción, el que no se imponga ninguna condición que involucre conjuntamente a ambas operaciones. La libertad que hay en la elección de Φ, el *multioperador*, sugiere un elevado número de ejemplos, y en efecto es así ya que, sin ánimo de extendernos, basta observar que cualquier expresión de la forma

$$F(x,y)=x+y+(f_1(x,y),\ldots,f_n(x,y)),\quad \forall_{x,y\in\mathbb{R}^n},$$

donde $f_i(x,y)$ son series de potencias que convergen en un entorno de 0 y tales que $f_i(0,y)=0=f_i(x,0)$ $\forall_{i=1,\ldots,n}$, define un lazo local analítico.

La clave en el tratamiento de Mikheev y Sabinin de la correspondencia de Lie para lazos es el asignar a cada lazo local analítico una conexión afín plana cuya expresión en términos de transporte paralelo es

$$\tau_b^a(X_a)=dL_bL_a^{-1}|_aX_a \tag{5}$$

y recíprocamente, a cualquier conexión afín plana se le puede asociar un lazo local analítico mediante

$$ab=\exp_a(\tau_a^e\exp_e^{-1}(b)) \tag{6}$$

(véase [6, 9]). Ambas construcciones no son, sin embargo, inversa una de la otra y en general para recuperar un lazo local analítico se precisa más información que la almacenada por la conexión afín plana asociada.

Para codificar la información de una conexión afín plana en términos de operaciones multilineales Mikheev y Sabinin proceden como sigue. Puesto que toda conexión plana queda localmente clasificada por su tensor de torsión, para clasificar la conexión (5) son necesarios únicamente datos que permitan reconstruir su torsión, y estos van a ser

$$\langle x_1, \dots, x_n; y, z\rangle = \nabla_{x_1^*} \cdots \nabla_{x_n^*} T(y^*, z^*)(e), \tag{7}$$

donde x^* denota el campo adaptado al vector tangente x. El principal resultado acerca de estas operaciones es su caracterización axiomática.

Teorema 2 (Mikheev y Sabinin, 1987). *Las operaciones multilineales definidas por (7) a partir del tensor de torsión de cualquier conexión afín plana satisfacen los axiomas (2), (3) y (4). Recíprocamente, cualquier familia de operaciones $\langle x_1, \dots, x_n; y, z\rangle$ ($n \geq 0$) que cumpla los axiomas (2), (3) y (4) y ciertas condiciones de convergencia puede obtenerse a partir del tensor de torsión de una conexión afín plana mediante la fórmula (7).*

El trabajo de Mikheev y Sabinin acerca de lazos locales analíticos se ha enfocado de modo formal en [7], lo que ha permitido extenderlo de modo muy natural a dimensión arbitraria y cuerpos de característica cero.

El propósito de este artículo es exponer de forma algebraica y directa el análogo del Teorema 2 en el contexto de lazos formales, completando algunos detalles dejados al lector en [7] pero reduciendo a un mínimo los conceptos involucrados. Este detenimiento en la exposición se ve gratificado con un nuevo resultado acerca de conexiones afines planas formales que aparece como Corolario 1 en la Sección 2 dedicada a introducir nociones y resultados básicos de geometría en un contexto formal. La Sección 3 se dedicará a probar el análogo del Teorema 2.

2. Algunos rudimentos de geometría formal

Dado un cuerpo k de característica cero, el álgebra de tensores simétricos sobre un k-espacio vectorial V se denotará por $k[V]$ y nos referiremos a los elementos de $k[V]$ como *distribuciones formales*[1] mientras que los elementos de V se dirán *vectores tangentes.* Además de su estructura natural de álgebra conmutativa, $k[V]$ posee estructura de álgebra de Hopf coconmutativa con la comultiplicación

$$\begin{aligned} \Delta\colon k[V] &\to k[V] \otimes k[V] \\ \mu &\mapsto \sum \mu_{(1)} \otimes \mu_{(2)} \end{aligned}$$

inducida por la aplicación

$$\begin{aligned} V &\to k[V] \otimes k[V] \\ v &\mapsto v \otimes 1 + 1 \otimes v, \end{aligned}$$

[1]Las definiciones que se presentan en esta sección pueden consultarse en [7].

la counidad $\epsilon\colon k[V] \to k$ inducida por

$$\begin{array}{rcl} V & \to & k \\ v & \mapsto & 0, \end{array}$$

y la antípoda $S\colon k[V] \to k[V]$ inducida por

$$\begin{array}{rcl} V & \to & k[V] \\ v & \mapsto & -v. \end{array}$$

Los elementos del espacio vectorial dual $k[V]^*$ se dicen *funciones formales* y forman un álgebra asociativa, conmutativa y unitaria bajo el producto dado por convolución

$$(fg)(\mu) = \sum f(\mu_{(1)})g(\mu_{(2)}).$$

Los elementos de $\mathrm{Hom}(k[V], V)$ se dicen *campos vectoriales formales* y actúan fielmente sobre las distribuciones formales mediante

$$A \cdot \mu = A\mu = -\sum \mu_{(1)}A(\mu_{(2)}).$$

Ejemplos de campos vectoriales formales que aparecerán más adelante son

$$\partial_a\colon \mu \mapsto \epsilon(\mu)a$$

para cualquier $a \in V$. Puesto que $\epsilon(1) = 1$, el valor del campo vectorial formal ∂_a en 1 es el vector tangente a.

Lema 1. *Sea* $A \in \mathrm{Hom}(k[V], V)$ *tal que* $A\mu = 0$ *para todo* $\mu \in k[V]$*. Se tiene que* $A = 0$*.*

Demostración. Por un lado se tiene que $0 = -\sum S(\mu_{(1)})A\mu_{(2)}$ ya que $A\mu_{(2)} = 0$ por hipótesis. Por otro lado,

$$\begin{array}{rcl} -\sum S(\mu_{(1)})A\mu_{(2)} & = & \sum S(\mu_{(1)})\mu_{(2)}A(\mu_{(3)}) \\ & = & \sum \epsilon(\mu_{(1)})A(\mu_{(2)}) = A\left(\sum \epsilon(\mu_{(1)})\mu_{(2)}\right) \\ & = & A(\mu), \end{array}$$

quedando probado que $A(\mu) = 0$ para todo $\mu \in k[V]$, lo que por definición equivale a que $A = 0$. □

El enunciado de los lemas 2, 3, 4 y 5 aparece en [7, Sección 5.2]. En línea con el objetivo introductorio de este artículo presentaremos su demostración.

Lema 2. *El conjunto de campos vectoriales formales* $\mathrm{Hom}(k[V], V)$ *con el producto dado por*

$$[A, B]\colon \mu \mapsto \sum B(\mu_{(1)}A(\mu_{(2)})) - A(\mu_{(1)}B(\mu_{(2)})) \tag{8}$$

posee estructura de álgebra de Lie.

Demostración. Puesto que la antisimetría del producto es evidente por la propia definición del producto $[A, B]$, basta entonces comprobar la identidad de Jacobi. El triple producto $[[A, B], C]$ aplicado a un elemento $\mu \in k[V]$ es

$$\begin{aligned} [[A,B],C](\mu) &= \sum C(\mu_{(1)}[A,B](\mu_{(2)})) - [A,B](\mu_{(1)}C(\mu_{(2)})) \\ &= \sum C(\mu_{(1)}B(\mu_{(2)}A(\mu_{(3)}))) - C(\mu_{(1)}A(\mu_{(2)}B(\mu_{(3)}))) \\ &\quad -B(\mu_{(1)}A(\mu_{(2)}C(\mu_{(3)}))) + A(\mu_{(1)}B(\mu_{(2)}C(\mu_{(3)}))) \\ &\quad +A(\mu_{(1)}C(\mu_{(2)})B(\mu_{(3)})) - B(\mu_{(1)}C(\mu_{(2)})A(\mu_{(3)})) \end{aligned}$$

por lo que la suma cíclica en A, B, C de este triple producto se anula proporcionando así la deseada identidad de Jacobi. □

Existe, como no, otro modo más sencillo de comprobar que los campos vectoriales formales forman un álgebra de Lie con el producto (8). Para ello basta observar que

$$\begin{aligned} [A,B]\cdot\mu &= -\sum \mu_{(1)}[A,B](\mu_{(2)}) \\ &= -\sum \mu_{(1)}B(\mu_{(2)}A(\mu_{(3)})) - \mu_{(1)}A(\mu_{(2)}B(\mu_{(3)})) \\ &= A\cdot B\mu - B\cdot A\mu \end{aligned}$$

y utilizar el Lema 1. Queda probado de paso que la acción $(A, \mu) \mapsto A \cdot \mu$ dota a $k[V]$ de estructura de módulo para el álgebra de Lie de campos vectoriales formales $\mathrm{Hom}(k[V], V)$.

La acción de los campos vectoriales formales sobre las distribuciones formales $k[V]$ induce una acción dual en el conjunto de funciones formales $k[V]^*$

$$D_A(f) := A(f) \colon \mu \mapsto \sum f(\mu_{(1)}A(\mu_{(2)}))$$

que también es fiel. Además tenemos que

Lema 3. *Para cualquier campo formal A, la aplicación D_A es una derivación del álgebra de funciones formales $k[V]^*$.*

Demostración. Se tiene que para todo $\mu \in k[V]$ y $f, g \in k[V]^*$

$$\begin{aligned} D_A(fg)(\mu) &= \sum fg(\mu_{(1)}A(\mu_{(2)})) \\ &= \sum f(\mu_{(1)}A(\mu_{(2)}))g(\mu_{(3)}) + f(\mu_{(1)})g(\mu_{(2)}A(\mu_{(3)})) \\ &= D_A(f)g(\mu) + fD_A(g)(\mu) \end{aligned}$$

quedando probado así que $D_A(fg) = D_A(f)g + fD_A(g)$. □

La aplicación $D\colon \mathrm{Hom}(k[V], V) \to \mathrm{Der}(k[V]^*)$ definida por $A \mapsto D_A$ es un monomorfismo de álgebras de Lie que permite interpretar los campos vectoriales formales como derivaciones del álgebra de funciones formales. Por supuesto, al ser un homomorfismo de álgebras de Lie se tiene en particular que

$$D_{[A,B]} = D_A D_B - D_B D_A.$$

Por otro lado, el álgebra de funciones formales $k[V]^*$ actúa sobre el conjunto de campos vectoriales formales $\mathrm{Hom}(k[V], V)$ mediante

$$f \cdot A := fA\colon \mu \mapsto \sum f(\mu_{(1)})A(\mu_{(2)}).$$

Esta acción satisface:

Lema 4. *Para cualesquiera $f, g \in k[V]^*$ y $A, B \in \mathrm{Hom}(k[V], V)$ se tiene que*

- $fg \cdot A = f \cdot gA$,
- $fA(g) = f \cdot A(g)$ *y*
- $[A, fB] = A(f)B + f[A, B]$

Demostración. Para cualquier $\mu \in k[V]$ se cumple que

$$\begin{aligned}(fg \cdot A)(\mu) &= \sum fg(\mu_{(1)})A(\mu_{(2)}) = \sum f(\mu_{(1)})g(\mu_{(2)})A(\mu_{(3)}) \\ &= \sum f(\mu_{(1)})gA(\mu_{(2)}) = f \cdot gA(\mu).\end{aligned}$$

También se cumple que

$$\begin{aligned}fA(g)(\mu) &= \sum g(\mu_{(1)}fA(\mu_{(2)})) = \sum g(\mu_{(1)}f(\mu_{(2)})A(\mu_{(3)})) \\ &= \sum f(\mu_{(1)})g(\mu_{(2)}A(\mu_{(3)})) = f \cdot A(g)(\mu).\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}[A, fB](\mu) &= \sum fB(\mu_{(1)}A(\mu_{(2)})) - A(\mu_{(1)}fB(\mu_{(2)})) \\ &= \sum f(\mu_{(1)}A(\mu_{(2)}))B(\mu_{(2)}) + f(\mu_{(1)})B(\mu_{(2)}A(\mu_{(3)})) \\ &\quad -A(\mu_{(1)}f(\mu_{(2)})B(\mu_{(3)})) \\ &= A(f)B(\mu) + f[A, B](\mu).\end{aligned}$$

□

El conjunto de campos vectoriales es un módulo libre para el álgebra de funciones formales. En lo que sigue se usará frecuentemente el *Convenio de sumación de Einstein* por el que si aparece un índice repetido en una expresión se asume que existe una suma numerada por ese índice en un cierto rango que quedará claro por el contexto. Por ejemplo, se escribirá $\partial_{a_j} = f^i_j A_i$ en lugar de $\partial_{a_j} = \sum_i f^i_j A_i$ puesto que es i el índice repetido en el segundo miembro de la igualdad.

Lema 5. *Sea $\{A_i \mid i \in I\} \subseteq \mathrm{Hom}(k[V], V)$ un conjunto de campos vectoriales formales. Se tiene que $\{A_i(1) \mid i \in I\}$ es una k-base de V si y solamente si $\{A_i \mid i \in I\}$ es una $k[V]^*$-base de $\mathrm{Hom}(k[V], V)$.*

Demostración. Sea $\{A_i \mid i \in I\}$ tal que $\{A_i(1) \mid i \in I\}$ es una base de V. Dado un campo formal A, se pueden definir inductivamente en el grado de $\mu \in k[V]$ funciones formales f^i tales que

$$A(\mu) = \sum f^i(\mu_{(1)})A_i(\mu_{(2)}) = f^i(\mu)A_i(1) + \text{términos previamente definidos} \tag{9}$$

lo que muestra que $\{A_i \mid i \in I\}$ genera el $k[V]^*$-módulo $\mathrm{Hom}(k[V], V)$. La elección de $f^i(\mu)$ en (9) es claramente única por lo que de hecho $\{A_i \mid i \in I\}$ es base.

Sea ahora $\{A_i \mid i \in I\}$ una $k[V]^*$-base de $\mathrm{Hom}(k[V], V)$ y fijemos una base $\{a_j \mid j \in J\}$ de V y campos formales $\partial_{a_j} : \mu \mapsto \epsilon(\mu)a_j$. Por el apartado anterior $\{\partial_{a_j} \mid j \in J\}$ es también una $k[V]^*$-base de $\mathrm{Hom}(k[V], V)$. Existen pues funciones formales f_j^i y g_i^j tales que $\partial_{a_j} = f_j^i A_i$ y $A_i = g_i^j \partial_{a_j}$. Estas funciones formales están ligadas mediante $g_i^j f_j^k = 0$ si $i \neq k$ y $g_i^j f_j^k = \epsilon$ si $i = k$ (recuérdese que ϵ es la counidad de $k[V]$). En particular, si $\alpha^i A_i(1) = 0$ para ciertos escalares α^i entonces $\alpha^i g_i^j(1)a_j = 0$ por lo que $\alpha^i g_i^j(1) = 0$ para todo j. Ahora bien, $0 = \alpha^i g_i^j f_j^k(1) = \alpha^k \epsilon(1) = \alpha^k$, lo que prueba que $\{A_i(1) \mid i \in I\}$ es libre. Puesto que $a_j = \partial_{a_j}(1) = f_j^i(1)A_i(1)$ entonces se puede concluir que efectivamente $\{A_i(1) \mid i \in I\}$ es una base de V. $\square$

Los elementos de $\mathrm{Hom}(k[V] \otimes V, V)$ tales que al restringirlos a $1 \otimes V$ sean la aplicación identidad se dicen *conexiones afines planas formales*. Es interesante resaltar que dichas conexiones forman un grupo, no abeliano en general, algo que aunque está implícito en [7] no queda sin embargo suficientemente resaltado.

Proposición 1. *El conjunto* $\mathrm{Hom}(k[V] \otimes V, V)$ *es un álgebra asociativa con el producto*

$$C * C'(\mu \otimes v) = \sum C(\mu_{(1)} \otimes C'(\mu_{(2)} \otimes v)).$$

Un elemento $C \in \mathrm{Hom}(k[V] \otimes V, V)$ *posee inverso si y solamente si la restricción de* C *a* $1 \otimes V$ *es una aplicación biyectiva.*

Demostración. La asociatividad del producto es una mera consecuencia de la coasociatividad de $k[V]$.

Dado C y C' su inverso, se tiene $C * C'(\mu \otimes v) = \epsilon(\mu)v = C' * C(\mu \otimes v)$. Fijando $\mu = 1$ estas igualdades se convierten en $C(1 \otimes C'(1 \otimes v)) = v = C'(1 \otimes C(1 \otimes v))$ por lo que la restricción de C' a $1 \otimes V$ es la aplicación inversa de la restricción de C a $1 \otimes V$.

Sea ahora $C \in \mathrm{Hom}(k[V] \otimes V, V)$ tal que su restricción a $1 \otimes V$ es biyectiva. Se puede definir inductivamente en el grado de μ una aplicación C' de modo que se cumpla que

$$\sum C'(\mu_{(1)} \otimes C(\mu_{(2)} \otimes v)) = \epsilon(\mu)v$$

o lo que es lo mismo, $C' * C = \epsilon \otimes \mathrm{Id}_V$. Esto muestra que C' es inverso por la izquierda de C y que C es un inverso por la derecha de C'. Puesto que la restricción de C' a $1 \otimes V$ es también biyectiva (coincide con la inversa de la restricción de C a dicho espacio), por el mismo motivo C' posee también inverso por la izquierda. Por lo tanto C' posee un inverso (bilátero) que necesariamente es C, quedando así probado que C posee inverso. $\square$

Como consecuencia inmediata de la Proposición 1 tenemos:

Corolario 1. *El conjunto de conexiones afines planas formales posee estructura de grupo con el producto*

$$C * C' \colon \mu \otimes v \mapsto \sum C(\mu_{(1)} \otimes C'(\mu_{(2)} \otimes v)).$$

Proposición 2. *El álgebra asociativa* $\mathrm{Hom}(k[V] \otimes V, V)$ *actúa en el conjunto de campos vectoriales formales* $\mathrm{Hom}(k[V[, V)$ *mediante*

$$C \cdot A \colon \mu \mapsto \sum C(\mu_{(1)} \otimes A(\mu_{(2)}))$$

para cualesquiera $C \in \mathrm{Hom}(k[V] \otimes V, V)$ *y* $A \in \mathrm{Hom}(k[V], V)$*.*

Observamos que una conexión afín plana formal C es, en esencia, lo mismo que una $k[V]^*$-base de $\mathrm{Hom}(k[V], V)$. Dada una tal $k[V]^*$-base $\{A_i \mid i \in I\}$ se define la conexión afín plana formal $C(\mu \otimes v) = \alpha^i A_i(\mu)$ si $v = \alpha^i A_i(1)$, y recíprocamente, dada C se define para cualquier $v \in V$ el *campo vectorial formal adaptado*

$$v^* \colon \mu \mapsto C(\mu \otimes v)$$

que cumple que $v^*(1) = v$. Partiendo de cualquier base de V se obtiene por este método una $k[V]^*$-base de campos vectoriales adaptados de $\mathrm{Hom}(k[V], V)$. Para evitar notación extra, y siguiendo [7], denotaremos $C(\mu \otimes v)$ por $\mu * v$ cuando no induzca a confusión. Si C' es la inversa de la conexión C, $C'(\mu \otimes v)$ se denotará por $\mu \backslash^* v$. Así,

$$\sum \mu_{(1)} * (\mu_{(2)} \backslash^* v) = \epsilon(\mu) v = \sum \mu_{(1)} \backslash^* (\mu_{(2)} * v).$$

El nombre *conexión afín plana formal* queda justificado por la siguiente proposición que recoge las propiedades de la *derivada covariante* de los campos vectoriales formales A, B

$$\nabla_A(B) = \sum B(\mu_{(1)} A(\mu_{(2)})) - (\mu_{(1)} A(\mu_{(2)})) * (\mu_{(3)} \backslash^* B(\mu_{(4)}))$$

asociada a la conexión.

Proposición 3 (Proposition 5.1. en [7])**.** *Sean* A, B *campos vectoriales formales,* f *una función formal y* $v, w \in V$*. Se tiene que*

(1) $\nabla_{fA}(B) = f \nabla_A(B)$,
(2) $\nabla_A(fB) = A(f)B + f\nabla_A(B)$ *y*
(3) $\nabla_{v^*}(w^*) = 0$.

Una conexión afín plana formal permite definir la torsión de dos campos vectoriales formales del modo usual

$$T(A, B) = \nabla_A(B) - \nabla_B(A) - [A, B].$$

3. Relación entre la torsión y las álgebras de Sabinin

Una de las muchas ideas de Mikheev y Sabinin en este contexto fue, como ya se ha dicho, clasificar un lazo local (monoalternativo) mediante el operador de torsión de la conexión afín plana asociada (5). Hábilmente Mikheev y Sabinin describen los campos vectoriales $T(y^*, z^*)$ a través de unos coeficientes análogos a los de Taylor en los que las derivadas direccionales se sustituyen por derivadas geométricas, es decir,

$$\langle x_1, \ldots, x_n; y, z \rangle = \nabla_{x_1^*} \cdots \nabla_{x_n^*} T(y^*, z^*)(1). \tag{10}$$

Esta aproximación a la caracterización algebraica de la torsión de una conexión afín plana tiene perfecto sentido, en vista de lo comentado en la Sección 2, en un contexto formal.

Sean $\mathfrak{L} = \mathrm{Hom}(k[V], V)$ el álgebra de Lie de campos vectoriales formales, $\mathfrak{H} = \{A \in \mathfrak{L} \mid A(1) = 0\}$ la subálgebra de Lie de los campos formales que anulan a 1 y $U(\mathfrak{L})$, $U(\mathfrak{H})$ sus correspondientes envolventes universales. Claramente, si $A_i \in \mathfrak{L}$ $(i \in I)$ son tales que $\{A_i(1) \mid i \in I\}$ es una k-base de V entonces

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{H} \oplus \mathrm{span}\langle A_i \mid i \in I\rangle.$$

En particular, si $\{a_i \mid i \in I\}$ es una base de V entonces $\mathfrak{L} = \mathfrak{H} \oplus \mathrm{span}\langle \partial_{a_i} \mid i \in I\rangle$.

Lema 6. *Sea $D \in U(\mathfrak{L})$. Se tiene que $D \in \mathfrak{H}U(\mathfrak{L})$ si y solamente si $Df(1) = 0$ para toda función formal $f \in k[V]^*$.*

Demostración. Por la definición de la acción de $\mathfrak{L}$ sobre $k[V]^*$,

$$\mathfrak{H}U(\mathfrak{L})f(1) = f(S(\mathfrak{H}U(\mathfrak{L})) \cdot 1) = -f(S(U(\mathfrak{L}))\mathfrak{H} \cdot 1) = 0$$

puesto que $A \cdot 1 = -A(1) = 0$ para todo $A \in \mathfrak{H}$.

Recíprocamente, si $D \in U(\mathfrak{L})$ verifica que $Df(1) = 0$ para toda $f \in k[V]^*$ entonces basta escribir $D = D_0 + \sum_{n,i_1,\dots,i_n} \alpha_{i_1,\dots,i_n}\partial_{a_{i_1}} \cdots \partial_{a_{i_n}}$, donde $\{a_i \mid i \in I\}$ es una base prefijada de V y $D_0 \in \mathfrak{H}U(\mathfrak{L})$, para observar que

$$0 = Df(1) = \sum_{n,i_1,\dots,i_n} \alpha_{i_1,\dots,i_n}\partial_{a_{i_1}} \cdots \partial_{a_{i_n}} f(1) = f\Big(\sum_{n,i_1,\dots,i_n} \alpha_{i_1,\dots,i_n} a_{i_1} \cdots a_{i_n}\Big)$$

para cualquier $f \in k[V]^*$. Esto muestra que $\sum_{n,i_1,\dots,i_n} \alpha_{i_1,\dots,i_n} a_{i_1} \cdots a_{i_n} = 0$ por lo que $\sum_{n,i_1,\dots,i_n} \alpha_{i_1,\dots,i_n}\partial_{a_{i_1}} \cdots \partial_{a_{i_n}} = 0$ y $D \in \mathfrak{H}U(\mathfrak{L})$. □

3.1. Álgebras de Sabinin procedentes de conexiones afines planas.

En este apartado se considera fijada una conexión afín plana formal $\mu \otimes v \mapsto v^*(\mu)$. Se usará también la notación $\underline{x} = x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$ para tensores homogéneos y

$$\underline{x}^* = (x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)^* = x_1^* \cdots x_n^*$$

para el producto en $U(\mathfrak{L})$ de los campos adaptados $x_1^*, \dots, x_n^*$ definidos por la conexión. Por analogía con (10) se define

$$\langle \underline{x}; y, z\rangle_F = \langle x_1 \otimes \cdots \otimes x_n; a, b\rangle_F = \langle x_1, \dots, x_n; y, z\rangle_F = \nabla_{x_1^*} \cdots \nabla_{x_n^*} T(y^*, z^*)(1).$$

donde T es la torsión de la conexión afín plana formal.

Fijada una k-base $\{a_i \mid i \in I\}$ de V y la correspondiente $k[V]^*$-base de campos adaptados $\{a_i^* \mid i \in I\}$ de $\mathfrak{L}$, por la Proposición 3 se tiene que si $[y^*, z^*] = f^i a_i^*$ entonces

$$\langle x_1, \dots, x_n; y, z\rangle_F = \nabla_{x_1^*} \cdots \nabla_{x_n^*} T(y^*, z^*)(1) = x_1^* \cdots x_n^*(f^i)(1)a_i$$

por lo que

$$\langle \underline{x}; y, z\rangle_F^* = \underline{x}^*(f^i)(1)a_i^*. \tag{11}$$

Una consecuencia inmediata del Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt para la envolvente universal $U(\mathfrak{L})$ del álgebra de Lie $\mathfrak{L}$ es:

Lema 7. *Si* $\{a_i \mid i \in I\}$ *es una base de* V *entonces* $\mathfrak{H}U(\mathfrak{L}) \cap \operatorname{span}\langle a^*_{i_1} \cdots a^*_{i_n} \mid i_1, \dots, i_n \in I,\ \ n \in \mathbb{N}\rangle = \{0\}$.

El álgebra tensorial $T(V)$ sobre V posee una comultiplicación $\Delta\colon T(V) \to T(V) \otimes T(V)$, $\underline{x} \mapsto \sum \underline{x}_{(1)} \otimes \underline{x}_{(2)}$ inducida por la aplicación $v \mapsto v \otimes 1 + 1 \otimes v$, $\forall_{v\in V}$.

Lema 8. *Para cualesquiera* $x_1, \dots, x_n, y, z \in V$, $\underline{x} = x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$ *se tiene que*

$$\underline{x}^*[y^*, z^*] \equiv -\sum \underline{x}^*_{(1)} \langle \underline{x}_{(2)}; y, z\rangle^*_F \quad \text{mód } \mathfrak{H}U(\mathfrak{L})$$

Demostración. Primero es conveniente fijar una base $\{a_i \mid i \in I\}$ de V. Una vez fijada esta base, el campo vectorial formal $[y^*, z^*]$ se puede escribir como $[y^*, z^*] = f^i a^*_i$ para ciertas funciones formales f^i. Sea ahora $g \in k[V]$ una función formal arbitraria. Se tiene que

$$\underline{x}^*[y^*, z^*]g = \underline{x}^* f^i a^*_i g = \underline{x}^* \cdot f^i a^*_i(g) = \sum \left(\underline{x}^*_{(1)} f^i\right)\left(\underline{x}^*_{(2)} a^*_i(g)\right)$$

por lo que

$$\begin{aligned}
\underline{x}^*[y^*, z^*]g(1) &= \sum \left(\underline{x}^*_{(1)} f^i\right)(1)\left(\underline{x}^*_{(2)} a^*_i(g)\right)(1)\\
&= \sum \underline{x}^*_{(1)} \left(\left(\underline{x}^*_{(2)}(f^i)(1)\right) a^*_i(g)\right)(1)\\
&= -\sum \underline{x}^*_{(1)} \langle \underline{x}_{(2)}; y, z\rangle^*_F(g)(1).
\end{aligned}$$

El resultado se sigue del Lema 6. □

Proposición 4 (Mikheev y Sabinin, 1987)**.** *El espacio vectorial* V *dotado con las operaciones* $\langle x_1, \dots, x_n; y, z\rangle_F$ *es un álgebra de Sabinin.*

Demostración. En vista del Lema 8 el resultado es similar a la Proposición 17 en [8]. Por ejemplo, si $\underline{x} = x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$ entonces, módulo $\mathfrak{H}U(\mathfrak{L})$,

$$\begin{aligned}
&-\sum \underline{x}^*_{(1)} \langle \underline{x}_{(2)} c; a, b\rangle^*_F - \sum \underline{x}^*_{(1)} \langle \underline{x}_{(2)}; \langle \underline{x}_{(3)}; a, b\rangle_F, c\rangle^*_F\\
&\quad \equiv \underline{x}^* c^*[a^*, b^*] + \sum \underline{x}^*_{(1)} c^* \langle \underline{x}_{(1)}; a, b\rangle^*_F + \underline{x}^*_{(1)}[\langle \underline{x}_{(2)}; a, b\rangle^*_F, c^*]\\
&\quad \equiv \underline{x}^* c^*[a^*, b^*] + \sum \underline{x}^*_{(1)} \langle \underline{x}_{(1)}; a, b\rangle^*_F c^* \equiv \underline{x}^* c^*[a^*, b^*] - \underline{x}^*[a^*, b^*]c^*\\
&\quad \equiv -\underline{x}^*[[a^*, b^*], c^*]
\end{aligned}$$

por lo que la suma cíclica en a, b, c de

$$\sum \underline{x}^*_{(1)} \langle \underline{x}_{(2)} c; a, b\rangle^*_F + \sum \underline{x}^*_{(1)} \langle \underline{x}_{(2)}; \langle \underline{x}_{(3)}; a, b\rangle_F, c\rangle^*_F$$

pertenece a $\mathfrak{H}U(\mathfrak{L})$ y, en virtud del Lema 7, es nula, quedando así probado que las operaciones $\langle x_1, \dots, x_n; y, z\rangle_F$ satisfacen el axioma (3) de la definición de álgebra de Sabinin. □

3.2. Conexiones afines planas procedentes de álgebras de Sabinin.

Dada una estructura de álgebra de Sabinin $\langle x_1, \dots, x_n; y, z\rangle$ en V, se define el $T(V)$-módulo a derecha

$$\tilde{S}(V) = T(V)/\operatorname{span}\left\langle \underline{x}ab\underline{y} - \underline{x}ba\underline{y} + \sum \underline{x}_{(1)}\langle \underline{x}_{(2)}; a, b\rangle \underline{y} \mid \underline{x}, \underline{y} \in T(V), a, b \in V \right\rangle.$$

Obsérvese que, como suele ser costumbre, en lugar de $\otimes$ se ha usado la yuxtaposición para denotar el producto en $T(V)$. La proyección en $\tilde{S}(V)$ de un elemento $x_1 \cdots x_n$ de $T(V)$ se escribirá mediante $\overline{x_1 \cdots x_n}$. El siguiente resultado aparece en [2, Theorem 7.4] y en [8, Theorem 37]:

Teorema 3. *La aplicación*

$$\begin{array}{rcl} \Theta \colon k[V] & \to & \tilde{S}(V) \\ x_1 \cdots x_n & \mapsto & \dfrac{1}{n!} \displaystyle\sum_{\sigma \in \Sigma_n} \overline{x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}} \end{array}$$

es un isomorfismo de coálgebras.

La proyección de $k[V]$ sobre V se denotará por π_V. La acción a derecha de $T(V)$ sobre $\tilde{S}(V)$ se puede transportar a $k[V]$ mediante $\Theta^{-1}(\Theta(\mu)v)$ $\forall_{\mu \in k[V], v \in V}$ y de hecho puede recuperarse a partir de su proyección en V como muestra el siguiente resultado.

Lema 9. *Dada $\mu \in k[V]$ y $v \in V$ se tiene que*

$$\Theta^{-1}(\Theta(\mu)v) = \sum \mu_{(1)}\pi_V(\Theta^{-1}(\Theta(\mu)v)).$$

Demostración. Puesto que Θ es un isomorfismo de coálgebras, $\Delta(\Theta^{-1}(\Theta(\mu)v)) = \sum \Theta^{-1}(\Theta(\mu_{(1)})v) \otimes \mu_{(2)} + \mu_{(1)} \otimes \Theta^{-1}(\Theta(\mu_{(2)})v)$. Aplicando el Lema 5.2 en [7] se tiene el enunciado. $\square$

Proposición 5. *Toda estructura de álgebra de Sabinin de V viene dada por (10) para una cierta conexión afín plana formal.*

Demostración. Se define $C \in \operatorname{Hom}(k[V] \otimes V, V)$ como

$$C(\mu \otimes v) = \pi_V(\Theta^{-1}(\Theta(\mu)v)).$$

Claramente $C(1 \otimes v) = \pi_V(\Theta^{-1}(v)) = \pi_V(v) = v$ por lo que C es una conexión afín plana formal.

Para cualquier $f \in k[V]^*$ y $\mu \in k[V]$ se tiene que

$$\begin{aligned} (x_1^* \cdots x_n^* f)(\mu) &= \sum (x_2^* \cdots x_n^* f)(\mu_{(1)} x_1^*(\mu_{(2)}))) \\ &= \sum (x_2^* \cdots x_n^* f)\left(\mu_{(1)}\pi_V(\Theta^{-1}(\Theta(\mu_{(2)})x_1))\right) \\ &= (x_2^* \cdots x_n^* f)\left(\Theta^{-1}(\Theta(\mu)x_1)\right) \\ &= \cdots \\ &= f(\Theta^{-1}(\Theta(\mu)x_1 \cdots x_n)) \end{aligned}$$

Así pues,

$$\begin{aligned}\underline{x}^*[y^*,z^*]f(1) &= f(\Theta^{-1}(\overline{x_1\cdots x_n yz})) - f(\Theta^{-1}(\overline{x_1\cdots x_n zy}))\\ &= -\sum f(\Theta^{-1}(\overline{\underline{x}_{(1)}\langle \underline{x}_{(2)};y,z\rangle}))\\ &= -\sum \underline{x}^*_{(1)}\langle \underline{x}_{(2)};y,z\rangle^* f(1)\end{aligned}$$

lo que en virtud del Lema 8 muestra que

$$-\sum \underline{x}^*_{(1)}\langle \underline{x}_{(2)};y,z\rangle^* \equiv -\sum \underline{x}^*_{(1)}\langle \underline{x}_{(2)};y,z\rangle^*_F \qquad \text{mód } \mathfrak{H}U(\mathfrak{L}).$$

Por el Lema 7 se puede concluir que

$$\sum \underline{x}^*_{(1)}\langle \underline{x}_{(2)};y,z\rangle^* = \sum \underline{x}^*_{(1)}\langle \underline{x}_{(2)};y,z\rangle^*_F.$$

Finalmente, por inducción en n se obtiene fácilmente que

$$\langle x_1,\ldots,x_n;y,z\rangle = \langle x_1,\ldots,x_n;y,z\rangle_F.$$

$\square$

Referencias

[1] M. A. Akivis, V. V. Goldberg. Local algebras of a differential quasigroup. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **43**(2), 207–226, 2006.

[2] Y. Chen, Y. Chen, C. Zhong. *Composition-Diamond Lemma for Modules*. Preprint. `http://arxiv.org/abs/0804.0917`

[3] K. H. Hofmann, K. Strambach. Lie's fundamental theorems for local analytical loops. *Pacific J. Math.* **123**(2), 301–327, 1986.

[4] E. N. Kuz'min. The connection between Mal'cev algebras and analytic Moufang loops. *Algebra i Logika* **10**, 3–22, 1971.

[5] A. I. Mal'cev. Analytic loops. *Math. Sb. N. S.* **36**(78), 569–576, 1955.

[6] P. O. Mikheev, L. V. Sabinin. Quasigroups and differential geometry. En *Quasigroups and loops: theory and applications*, O. Chein, H.O. Pflugfelder y J.D.H. Smith (eds.), pp. 357–430. Sigma Ser. Pure Math., 8, Heldermann, Berlin, 1990.

[7] J. Mostovoy, J. M. Pérez-Izquierdo. *Formal Multiplications, Bialgebras of Distributions and Non-associative Lie Theory*. Preprint. `http://arxiv.org/abs/0905.3604`

[8] J. M. Pérez-Izquierdo. Algebras, hyperalgebras, nonassociative bialgebras and loops. *Adv. Math.* **208**(2), 834–876, 2007.

[9] L. V. Sabinin. *Smooth quasigroups and loosps*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999.

[10] L. V. Sabinin, P. O. Mikheev. Infinitesimal theory of local analytic loops. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **297**(4), 801–804, 1987. Versión inglesa en *Soviet Math. Dokl.* **36**(3), 545–548, 1988.

[11] I. P. Shestakov, U. U. Umirbaev. Free Akivis algebras, primitive elements, and hyperalgebras. *J. Algebra* **250**(2), 533–548, 2002.

Dpto. Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja, Spain
Correo electrónico: `pilar.benito@unirioja.es`

Dpto. Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja, Spain
Correo electrónico: `clara.jimenez@unirioja.es`

Dpto. Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja, Spain
Correo electrónico: `sara.madariaga@unirioja.es`

Dpto. Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja, Spain
Correo electrónico: `jm.perez@unirioja.es`