Boletín de Matemáticas
Nueva Serie, Volumen X No. 1 (2003), pp. 45–46

NOTA DE CLASE

UNA CONDICIÓN PARA QUE T_2 IMPLIQUE T_4

NÉSTOR RAUL PACHÓN R. (*)

Resumen. En esta nota se generaliza un resultado de la topología general, presentado en [1], en el que se impone una condición adicional a un espacio T_2 para que resulte T_3.

Palabras clave. Espacios T_2, espacios T_4, espacios compactos.

En un ejercicio propuesto en [1] se pide demostrar que si en un espacio T_2 la frontera de todo conjunto abierto es un conjunto compacto, entonces el espacio es T_3.

A continuación presentaremos un ejemplo de un espacio en el que la frontera de todo conjunto abierto es compacta. Como es usual, identificaremos a cada número ordinal con el conjunto de ordinales que son menores que éste. Recuérdese que un ordinal infinito es *límite* si no tiene antecesor inmediato. Denotaremos por ω al primer ordinal infinito.
Sea α cualquier número ordinal tal que existe un número finito de ordinales límite menores que α. Esto quiere decir que α tiene la forma $\omega n + m$, para algunos números naturales n y m.
Sea $L = \{\delta : \delta \text{ es un ordinal límite menor o igual a } \alpha\}$. Por nuestra hipótesis L es finito.
Al conjunto $[0, \alpha]$ de los ordinales menores o iguales que α lo dotaremos de la topología Ψ generada por la colección $\{\downarrow \beta : \beta \in [0, \alpha]\} \cup \{\uparrow \beta : \beta \in [0, \alpha]\}$, donde $\downarrow \beta = \{\gamma \in [0, \alpha] : \gamma < \beta\}$ y $\uparrow \beta = \{\gamma \in [0, \alpha] : \beta < \gamma\}$.
Es claro que en este espacio los únicos puntos abiertos son los elementos del conjunto $[0, \alpha] \setminus L$. En consecuencia, la frontera de cualquier subconjunto de

(*) Néstor Raul Pachón R. Profesor de la Escuela Colombiana de Ingeniería y de la Universidad Nacional de Colombia.
e-mail: nrpachon@hotmail.com.

$[0, \alpha]$ está contenida en L, y por lo tanto esa frontera será siempre compacta. Nótese también que este espacio es de Hausdorff.

Los espacios en los que todo abierto tiene frontera compacta hacen parte de un tipo de espacios relativamente conocidos llamados *rim-compactos*, que por definición son aquellos que tienen una base cuyos elementos tienen frontera compacta. Es conocido que todo espacio rim-compacto T_2 resulta ser T_3 (ver [2]). Sin embargo, no todo espacio rim-compacto T_2 es T_4, como se evidencia en el plano Sorgenfrey, que es el conjunto $\mathbb{R}^2$, dotado de la topología que tiene al conjunto $\{[a, b) \times [c, d) : a, b, c, d \in \mathbb{R},\ \text{y},\ a < b, c < d\}$ como una base. Nótese que la frontera de cada abierto básico es vacía, y por lo tanto compacta.

Como una curiosa generalización del ejercicio propuesto en [1], veremos que con las hipótesis dadas se obtiene el siguiente resultado más fuerte.

Proposición 1. *Si* (X, Φ) *es un espacio de Hausdorff en el que la frontera de todo subconjunto abierto es compacto, entonces* (X, Φ) *es* T_4.

Si X es un espacio topológico y $A \subset X$, denotaremos por $Fr\,(A)$ a la frontera de A en X, y por $int\,(A)$ al interior de A en X.
Nuestro resultado se deduce del siguiente lema.

Lema 2. *Si* F *y* G *son subconjuntos cerrados disjuntos de un espacio topológico* (X, Φ) *tales que* $Fr(F)$ *y* $Fr(G)$ *se pueden separar por abiertos disjuntos, entonces* F *y* G *se pueden separar por abiertos disjuntos.*

Para probar el lema basta observar que si U y V son conjuntos abiertos y disyuntos tales que $Fr\,(F) \subseteq U$ y $Fr\,(G) \subseteq V$, entonces $F \subseteq (U \cap G^c) \cup int\,(F)$ y $G \subseteq (V \cap F^c) \cup int\,(G)$.

Teniendo en cuenta que en un espacio T_2 los compactos disjuntos se pueden separar por abiertos disjuntos, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 3. *Si* F *y* G *son cerrados disjuntos en un espacio* T_2 *y sus fronteras son compactas, entonces* F *y* G *también se pueden separar.*

De aquí se desprende inmediatamente el resultado propuesto.

Bibliografía

[1] J. Margalef, J. Outerelo, y J. Pinilla, *Topología*, vol. 2. Editorial Alhambra. Madrid, 1979.

[2] T. Noiri, *Weak-continuity and closed graphs.* Casopis Pest. Mat. **101** (1976), 379-382.