Boletín de Matemáticas
Nueva Serie, Volumen X No. 1 (2003), pp. 31–44

SOLUCIÓN DE ALGUNOS PROBLEMAS NO LINEALES CON UN MÉTODO ITERATIVO

Rodrigo Duque B.(*)

Resumen. Se muestra cómo construir la solución de un problema no lineal con un proceso iterativo donde en cada paso es necesario hallar una solución aproximada a una ecuación lineal.

Palabras clave: Sistemas simétricos positivos, operadores diferenciales, espacios de Sobolev.

1. APROXIMACIÓN DE FUNCIONES

El propósito de esta sección es presentar algunas ideas y resultados que necesitaremos más adelante. Los resultados se restringen a funciones vectoriales de cuadrado integrable sobre un toro.

Consideremos funciones reales $v(x)$ de n-variables x_1, x_2,...,x_n de periodo 2π en cada una de las variables. Con ayuda del Operador Laplaciano Δ

$$\Delta = \sum_{r=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_r} \right)^2,$$

introducimos el producto interno

$$(v, w)_\rho = \int_\Omega v(-\Delta)^\rho w dx \quad \text{para} \quad \rho = 0, 1, ..., r, \tag{1.1}$$

donde la integración es tomada sobre $0 \leq x_r \leq 2\pi$ y dx abrevia el elemento de volumen $dx_1 dx_2 ... dx_n$.

Este producto nos garantiza que $(v, v)_\rho = \int v(-\Delta)^\rho v dx$ sea no negativa.

Observamos que la norma $||v||_\rho = (v, v)_\rho^{1/2}$ se anula para funciones constantes si $\rho > 0$, pero $||v|| = (||v||_0^2 + ||v||_\rho^2)^{1/2}$ sí representa una norma propia. La

(*) Rodrigo Duque B., Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.
e-mail: roduba@matematicas.unal.edu.co, rodrigodb@etb.net.co

El autor agradece al Profesor Francisco Caicedo la colaboración y orientación en este trabajo.

clausura de todas las funciones C^∞ de periodo 2π bajo esta norma forma un espacio de Hilbert, el cual denotaremos por V^ρ y es llamado Espacio de Sobolev.
Usando la expansión de Fourier $v = \sum_k v_k e^{i(k,x)}$ podemos introducir los espacios V^ρ para valores no enteros.
Definimos:

$$\|v\|_\rho^2 = 2\pi \sum_k |k|^{2\rho} |v_k|^2, \tag{1.2}$$

donde $|k|^2 = k_1^2 + \cdots + k_n^2$.
La clausura de los polinomios trigonométricos en la norma (1.2) con ρ real, será llamado V^ρ. Para ρ entero positivo, esta definición coincide con la definición dada inicialmente.

Las normas $\|v\|_0, \|v\|_\rho$ y $\|v\|_r$ están relacionadas por algunas desigualdades, de tipo Sobolev, estudiaremos las que son necesarias posteriormente.

Se sabe que para $v \in V^\rho$ dado, la función $\varphi(\rho) = log\|v\|_\rho$ es una función convexa, con $0 < \rho < r$, asumiendo $0 < \|v\|_r < \infty$.
Esto se desprende de (1.2) donde se define a $\varphi(\rho)$ como una función analítica para valores complejos de ρ en la banda $0 \leq Re(\rho) \leq r$ y $Max_{Re(z)=\rho}|\varphi(z)| = \varphi(\rho)$, asumimos que v no tiene términos constantes. Entonces del teorema de los tres círculos de Hadamard se sigue la convexidad de $\varphi(\rho)$ en $0 \leq \rho \leq r$.

Siendo φ convexa, con $\alpha\rho_1 + \beta\rho_2 = \rho$, donde $0 \leq \alpha, \beta \leq 1,\ \alpha + \beta = 1$, tenemos que $\varphi(\rho) \leq \alpha\varphi(\rho_1) + \beta\varphi(\rho_2)$, es decir, $log\|v\|_\rho \leq \alpha log\|v\|_{\rho_1} + \beta log\|v\|_{\rho_2}$ que podemos escribir como $log\|v\|_\rho \leq log(\|v\|_{\rho_1}^\alpha \|v\|_{\rho_2}^\beta)$ y así obtenemos:

$$\|v\|_\rho \leq \|v\|_{\rho_1}^\alpha \|v\|_{\rho_2}^\beta \quad \text{para} \quad \alpha\rho_1 + \beta\rho_2 = \rho. \tag{1.3}$$

En particular:

$$\|v\|_\rho \leq \|v\|_0^{1-\frac{\rho}{r}} \|v\|_r^{\frac{\rho}{r}}, \qquad 0 < \rho < r. \tag{1.3'}$$

Notemos también que si $0 \leq \rho < \rho' \leq r$, entonces $V^{\rho'} \subset V^\rho$.

Ahora veamos como podemos aproximar una función $v \in V^\rho$.

Lema 1.1. *Para $v \in V^\rho, (0 < \rho < r), Q \geq 1$ existe $w \in V^r$ tal que*

$$\begin{cases} \|v - w\|_0 \leq kQ^{-\mu} \\ \|w\|_r \leq kQ, \end{cases} \tag{1.4}$$

donde $k = \|v\|_\rho$ y

$$\mu = \frac{\rho}{r-\rho}, \textit{ es decir, } \frac{\rho}{r} = \frac{\mu}{\mu+1}. \tag{1.5}$$

Demostración. Elegimos como w una serie truncada de Fourier de v, tomando un N apropiado.

1) Sea por tanto,

$$w = \sum_{|k| \leq N} v_k e^{i(k,x)},$$

entonces

$$\begin{aligned}\|w\|_r^2 &= 2\pi \sum_{|k|\le N} |k|^{2(r-\rho)}|k|^{2\rho}|v_k|^2 \\ &\le 2\pi \sum_{|k|\le N} N^{2(r-\rho)}|k|^{2\rho}|v_k|^2 \\ &\le N^{2(r-\rho)}\|w\|_\rho^2.\end{aligned}$$

Es decir

$$\|w\|_r \le N^{r-\rho}\|w\|_\rho. \tag{1}$$

2) Si denotamos $z = v - w$ tenemos

$$z = \sum_{|z|>N} v_k e^{i(k,x)},$$

entonces

$$\begin{aligned}\|z\|_\rho^2 &= 2\pi \sum_{|k|>N} |k|^{2\rho}|v_k|^2 \\ &\ge 2\pi \sum_{|k|>N} N^{2\rho}|v_k|^2 \\ &\ge N^{2\rho}\|z\|_0,\end{aligned}$$

es decir

$$\|z\|_\rho \ge N^\rho\|z\|_0. \tag{2}$$

3) Por la definición de w y de z, tenemos que $\|w\|_\rho \le \|v\|_\rho$ y $\|z\|_\rho \le \|v\|_\rho$, y de los resultados (1) y (2) podemos escribir:

$$\|v-w\|_0 = \|z\|_0 \le N^{-\rho}\|z\|_\rho \le N^{-\rho}\|v\|_\rho = N^{-\rho}k, \tag{2'}$$

$$\|w\|_r \le N^{r-\rho}\|w\|_\rho \le N^{r-\rho}\|v\|_\rho = N^{r-\rho}k, \tag{1'}$$

reescribiendo (1') y (2') tenemos:

$$\begin{cases}\|v-w\|_0 \le kN^{-\rho} \\ \|w\|_r \le kN^{r-\rho}.\end{cases} \tag{1.6}$$

La desigualdad (1.4) se obtiene de (1.6) tomando $N = Q^{\frac{1}{r-\rho}}$ y $\mu = \frac{\rho}{r-\rho}$. $\square$

Recíprocamente tenemos:

Lema 1.2. *Si $v \in V^0$ tiene la propiedad de que para todo $Q > 1$ existe $w \in V^r$ tal que*

$$\begin{cases} \|v - w\|_0 \le kQ^{-\mu} \\ \|w\|_r \le kQ, \end{cases}$$

entonces $v \in V^\rho$, para todo ρ que satisfaga

$$\frac{\rho}{r} < \frac{\mu}{\mu + 1} \tag{1.7}$$

y $\|v\|_\rho \le ck$, si $\|v\|_0 < k$, donde c depende de ρ, r, n.

Demostración. Si elegimos $Q' = 2Q$ y denotamos las aproximaciones correspondientes con w, w', tenemos:

$$\|w - w'\|_0 \le \|v - w\|_0 + \|v - w'\|_0 \le k\big(Q^{-\mu} + (Q')^{-\mu}\big) \le 2kQ^{-\mu},$$

$$\|w - w'\|_r \le \|w\|_r + \|w'\|_r \le k(Q + Q') \le 3kQ$$

y por (1.3') tenemos:

$$\|w - w'\|_\rho \le \|w - w'\|_0^{1-\frac{\rho}{r}} \|w - w'\|_r^{\frac{\rho}{r}} \le (2kQ^{-\mu})^{1-\frac{\rho}{r}} (3kQ)^{\frac{\rho}{r}} \le 3kQ^{-q},$$

con $q = \mu(1 - \frac{\rho}{r}) - \frac{\rho}{r}$. El supuesto (1.7) implica que $q > 0$.
Si tomamos $Q = Q_n = 2^n Q_0$ y llamamos a la aproximación correspondiente w_n, entonces

$$\|w_n - w_{n+1}\|_\rho \le 3kQ_0^{-q} 2^{-nq}.$$

Por lo tanto w_n converge en V^ρ, denotemos a este límite como w_∞.
Interpretando w_∞ como un elemento de V^0, la hipótesis $\|v - w_n\|_0 \le kQ^{-\mu}$ muestra que: $v = w_\infty$ y por lo tanto $v \in V^\rho$.
Aún más, podemos obtener un estimativo para $\|v\|_\rho$:
De la desigualdad

$$\|v - w_0\|_\rho \le \sum_{n=0}^{\infty} \|w_n - w_{n+1}\|_\rho \le kQ_0^{-q} c, \qquad \text{donde} \quad c = 3 \sum 2^{-nq},$$

y usando

$$\|w_0\|_r \le kQ_0, \qquad \|w_0\|_0 \le \|v\|_0 + kQ^{-\mu} \le 2k,$$

tenemos que

$$\|v\|_\rho \le \|w_0\|_\rho + Q_0^{-q} ck \le k(2Q_0^{\frac{\rho}{r}} + cQ_0^{-q}).$$

Para $Q_0 = 1$ conseguimos el estimativo deseado con $c + 2$ como constante. $\square$

Hemos probado la existencia de una familia de espacios de Banach V^ρ $(0 \leq \rho \leq r)$ ordenados que satisfacen:

a) En V^ρ se define la norma $(\|v\|_0^2 + \|v\|_\rho^2)^{\frac{1}{2}}$, donde $\|v\|_\rho$ es tal que

$$\|v\|_\rho \leq c\|v\|_0^{1-\frac{\rho}{r}}\|v\|_r^{\frac{\rho}{r}} \tag{1.8}$$

y c depende únicamente de ρ, r, n

b) Si $v \in V^\rho$ y $\|v\|_\rho \leq k$ entonces, para $Q > 1$ existe $w \in V^r$ tal que

$$\begin{cases} \|v - w\|_0 \leq ckQ^{-\mu} \\ \|w\|_r \leq kQ, \end{cases} \tag{1.9}$$

donde c depende solamente de r, ρ, n y $\mu = \frac{\rho}{r-\rho}$.

Recíprocamente, si $v \in V^0$ satisface (1.9) con algún $\|v\|_0 \leq k$ entonces, $v \in V^{\rho'}$ donde $\frac{\rho'}{r} < \frac{\mu}{\mu+1}$.

Existen otras familias ordenadas de espacios V^ρ que satisfacen estas propiedades. Por ejemplo, para las funciones v con m componentes, $v = (v_1, ..., v_m)$, tomando

$$\|v\|_\rho^2 = \sum_{j=1}^{m} \|v_j\|_\rho^2,$$

con $\|v_j\|_\rho$ definido como en (1.2), se satisfacen las propiedades.

Un ejemplo más interesante está dado por el par de normas:

$$|v|_0 = \max_{x\in\Omega} \sqrt{\sum_{j=1}^{m} |v_j|^2} \text{ y}$$

$$\|v\|_r^2 = \sum_{j=1}^{m} \|v_j\|_r^2.$$

El espacio V^0 está constituido por todas las funciones continuas con norma $|v|_0$ y el espacio V^r se define con la norma $\|v\|_r + |v|_0$.

Definimos ahora el espacio V^ρ y las normas intermedias. Consideramos únicamente ρ entero, $0 < \rho < r$. La norma está dada por el lado izquierdo de la siguiente desigualdad:

$$\left(sup \int |D_x^\rho v_j|^{2\frac{r}{\rho}} dx\right)^{\frac{\rho}{2r}} \leq c|v|_0^{1-\frac{\rho}{r}}\|v\|_r^{\frac{\rho}{r}}, \tag{1.10}$$

donde el *sup* es tomado sobre todas las derivadas D^ρ de orden ρ y todas las componentes v_j. Nuevamente, la constante c depende de n, r, ρ.

Esta desigualdad, que satisface el requerimiento (1.8), es un caso especial de un teorema mucho más general debido a L. Nirenberg [9].

2. SOLUCIONES APROXIMADAS DE ECUACIONES LINEALES

Consideremos dos familias de espacios como fueron definidos en la sección anterior: V^ρ y V^σ con $0 \leq \rho \leq r$ y $0 \leq \sigma \leq s$.

Denotemos por L al operador diferencial lineal de primer orden de V^r en G^s. Podríamos identificar G^s con V^{r-1} $(s = r-1)$. Sin embargo, queremos distinguir el dominio V^r y el rango G^s con notaciones diferentes.

Ahora definimos lo que se entiende por solución aproximada de la ecuación $Lv = g$. Hablamos de una solución aproximada $w = w_Q$ de $Lv = g$ si para todo $Q > 1$ existe $w \in V^r$ tal que:

$$\begin{cases} \|Lw - g\|_0 \leq k\eta(Q) \\ \|w\|_r \leq kQ, \end{cases} \tag{2.1}$$

si $\|g\|_s \leq k$ y $\eta(Q) \to 0$ cuando $Q \to \infty$.
Usualmente requerimos que

$$\eta(Q) \leq cQ^{-\mu} \tag{2.1'}$$

y llamamos a μ el grado de aproximación.

Lema 2.1. *Si L es un operador que admite un estimativo $\|v\|_0 \leq \|Lv\|_0 \leq c\|v\|_\alpha$ para $v \in V^r$, entonces la existencia de una solución aproximada para todo $Q > 1$ con $\mu > \frac{\alpha}{r-\alpha}$ implica la existencia de una solución exacta si $g \in G^\alpha$.*

Demostración. Elegimos $Q = Q_n = 2^n$ y denotamos por w_n la solución aproximada correspondiente. De (2.1) tenemos:

1)

$$\begin{aligned} \|w_n - w_{n+1}\|_0 &\leq \|L(w_n - w_{n+1})\|_0 \\ &\leq \|L(w_n) - g\|_0 + \|L(w_{n+1}) - g\|_0 \\ &\leq ckQ_n^{-\mu} + ckQ_{n+1}^{-\mu} \\ &\leq 2ckQ_n^{-\mu}. \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} \|w_n - w_{n+1}\|_r &\leq \|w_n\|_r + \|w_{n+1}\|_r \\ &\leq kQ_n + kQ_{n+1} \\ &\leq 3kQ_n. \end{aligned}$$

Usando los resultados (1) y (2) tenemos:

$$\begin{aligned}\|w_n - w_{n+1}\|_\rho &\le \|w_n - w_{n+1}\|_0^{1-\frac{\rho}{r}} \|w_n - w_{n+1}\|_r^{\frac{\rho}{r}} \\ &\le (2ckQ_n^{-\mu})^{1-\frac{\rho}{r}} (3kQ_n)^{\frac{\rho}{r}} \\ &\le ckQ_n^{-\mu(1-\frac{\rho}{r})+\frac{\rho}{r}},\end{aligned}$$

es decir $\|w_n - w_{n+1}\|_\rho \le ckQ_n^{-q}$ con $q = \mu(1-\frac{\rho}{r}) - \frac{\rho}{r}$.
Por lo tanto, concluimos que si $q > 0$, w_n converge en V^ρ a un elemento $v \in V^\rho$.

Tomando $\rho = \alpha$, obtenemos $q = \mu\frac{r-\alpha}{r} - \frac{\alpha}{r} > 0$ y entonces Lw_n converge a Lv en G^0. Así, $Lv = g$ y v es la solución deseada. □

A continuación se describe un método para construir soluciones aproximadas de algunos operadores lineales que comparten algunas propiedades de positividad con los operadores simétricos positivos.

Sea L un operador lineal que transforma funciones C^∞ en funciones C^∞ y que satisface los estimativos

$$\begin{cases} \|v\|_0^2 \le (Lv, v)_0 \\ \|v\|_s^2 \le c\big((Lv, v)_s + k_1^2\|v\|_0^2\big), \end{cases} \tag{2.2}$$

para $s = r - 1$ y todo $v \in V^r$, con $k_1 \ge 1$ que depende de L.
Más aún, sea

$$\|Lv\|_s \le c\|v\|_r. \tag{2.3}$$

El método consiste en reducir el problema a uno *elíptico*, adicionando a L un *término de viscosidad artificial*.

El artificio es el siguiente: Para resolver la ecuación $Lv = g$ aproximadamente y procurando suavidad, resolvemos la ecuación modificada

$$L_h w = (h^{2\alpha}(-\Delta)^\alpha + L)w = g \tag{2.4}$$

exactamente, donde h es un parámetro pequeño, $0 < h < 1$ y $2\alpha \le s$.

Esta ecuación es elíptica y satisface las mismas desigualdades que L. Respecto a la existencia y unicidad para esta ecuación, podemos afirmar que si g y los coeficientes de L son C^∞, también lo es la solución de (2.4).

Cuando $h \to 0$, se espera que la solución converja a la solución exacta de $Lv = g$.

Aunque $h \ne 0$, mantendremos el parámetro muy pequeño para mantener el tamaño de las derivadas mayores bajo.

El siguiente lema, cuya demostración se encuentra en [5], afirma que la solución de (2.4) conduce a una solución aproximada de $Lw = g$.

Lema 2.2. *La solución de (2.4), asumiendo que*

$$1 \leq \alpha \leq \frac{s}{2}, \tag{2.5}$$

conduce a una solución aproximada de $Lw = g$ con un grado de aproximación

$$\mu = 2\alpha. \tag{2.6}$$

3. EL CASO NO LINEAL

Mostraremos cómo el concepto de solución aproximada puede ser usado para la construcción de soluciones exactas de problemas no lineales.

Consideremos un operador diferencial $\mathfrak{F}(u)$ definido en una vecindad de un elemento u_0.

Este resultado es de tipo local y establece la existencia de una solución u cerca de u_0 para la ecuación $\mathfrak{F}(u) = f$, si f está cerca a $\mathfrak{F}(u_0) = f_0$.

Para este propósito requerimos que la ecuación linealizada

$$\lim_{t\to 0} \frac{\mathfrak{F}(u+tv) - \mathfrak{F}(u)}{t} = \mathfrak{F}'(u)v = g$$

admita solución aproximada. Esto se requiere para la linealización en $u = u_0$, y para todo u cerca a u_0.

Para ser más precisos: Sean V^r, V^0 los espacios de funciones definidos en la primera sección y sea $u \in V^r$, denotamos por U al dominio

$$U = \{u : \|u - u_0\|_0 < 1\}. \tag{3.1}$$

En este dominio se define $\mathfrak{F}(u)$, que lleva a u en f con

$$\begin{cases} \|f - f_0\|_0 < M & f_0 = \mathfrak{F}(u_0) \in G^s \\ \|f - f_0\|_s < \infty & 0 < s < r. \end{cases} \tag{3.2}$$

Además, para todo $k > 1$ y $u \in U$

$$\|\mathfrak{F}(u)\|_s \leq kM, \qquad \text{si} \quad \|u\|_r < k. \tag{3.3}$$

Asumimos también que el operador derivada $\mathfrak{F}'(u)$, definido por

$$\mathfrak{F}'(u)v = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big((\mathfrak{F}(u+tv) - \mathfrak{F}(u)\big)$$

existe, con valores en G^s, para $u \in U$ y $v \in V^r$.

Además suponemos que la ecuación linealizada $\mathfrak{F}'(u)v = g$ admite solución aproximada $v \in V^r$ en el siguiente sentido:

Si $g \in G^s$, $\|g\|_0 \leq 1$, $\|g\|_s \leq k$ y $\|u\|_r < k$, entonces para todo $Q > 1$, existe $v = v_Q \in V^r$ que satisface

$$\begin{cases} \|\mathfrak{F}'(u)v - g\|_0 \leq kQ^{-\mu} \\ \|v\|_r \leq kQ \end{cases} \tag{3.4}$$

y

$$\|\mathfrak{F}'(u)v\|_0 \geq \|v\|_0. \tag{3.5}$$

Finalmente requerimos que la parte cuadrática

$$Q(u,v) = \mathfrak{F}(u+v) - \mathfrak{F}(u) - \mathfrak{F}'(u)v$$

admita el estimativo

$$\|Q(u,v)\|_0 \leq M\|v\|_0^{2-\beta}\|v\|_r^{\beta} \quad ; \quad 0 \leq \beta < 1, \tag{3.6}$$

para $u \in U$ y $v \in V^r$ si $\|v\|_0 < \|v\|_r$.

Bajo las condiciones anteriores nos proponemos resolver $\mathfrak{F}(u) = f$, si f está cerca de $f_0 = \mathfrak{F}(u_0)$.

Como en el caso lineal, hablaremos de una solución aproximada para este problema, si para todo $K > 1$, existe $u = u_K \in U$ que satisface:

$$\|\mathfrak{F}(u) - f\|_0 < K^{-\lambda} \quad ; \quad \|u\|_r < K; \tag{3.7}$$

siendo λ el grado de aproximación.

El propósito del siguiente teorema, es mostrar que la construcción de una solución aproximada de grado μ, para la ecuación linealizada, puede ser usada para construir aproximaciones de grado λ para las ecuaciones no lineales. Tendremos que asumir dos condiciones más:

$$0 < \lambda + 1 < \frac{1}{2}(\mu + 1), \tag{3.8}$$

$$0 < \beta < \frac{\lambda}{\lambda+1}\frac{\mu}{\mu+1}\Big(1 - 2\frac{\lambda+1}{\mu+1}\Big), \tag{3.9}$$

donde β es el definido en (3.6).

Teorema. *Dada la ecuación $\mathfrak{F}(u) = f$, donde $\mathfrak{F}$ satisface las propiedades (3.1) a (3.6), si existen una constante $K_0 > 1$ y u_0 tales que*

$$\|f - f_0\|_0 < K_0^{-\lambda}, \quad \|u_0\|_r < K_0 \quad y \quad \|f\|_s \leq MK_0, \tag{3.10}$$

entonces podemos construir una sucesión de aproximaciones $u_n \in U$ tal que

$$\|\mathfrak{F}(u_n) - f\|_0 < K_n^{-\lambda}, \qquad \|u_n\|_r < K_n, \tag{3.11}$$

donde $K_n \to \infty$.
La sucesión u_n converge a una solución $\widehat{u}$ en norma, es decir

$$\|\widehat{u} - u_n\|_{\rho'} \to 0 \quad cuando \quad n \to \infty,$$

si

$$\frac{\rho'}{r} < \frac{\lambda}{\lambda + 2}. \tag{3.11'}$$

Demostración. Construiremos, inductivamente, una sucesión u_n que satisface las siguientes desigualdades:

$$\begin{cases} \|\mathfrak{F}(u_n) - f\|_0 < K_n^{-\lambda}, \\ \|u_n - u_{n-1}\|_0 < 2K_{n-1}^{-\lambda}, \\ \|u_n - u_{n-1}\|_r < \frac{1}{2}K_n, \end{cases} \tag{3.13}$$

donde $K_n = K_{n-1}^x$, con $1 < x < 2$.

Para $n = 0$ basta satisfacer la primera desigualdad de (3.13) y ésta es una de las hipótesis del teorema.

Asumiendo que las desigualdades (3.13) han sido probadas para $u_0, u_1, ..., u_n$, estableceremos el teorema para u_{n+1}.

De la tercera desigualdad de (3.13) y aplicando desigualdad triangular tenemos:

$$\begin{aligned} \|u_n\|_r &\leq K_0 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} K_j \\ &\leq K_0 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} K_0^{x^j}, \end{aligned}$$

lo cual es menor que K_n si K_0 se elige suficientemente grande, entonces por (3.3), $\|\mathfrak{F}(u_n)\|_s \leq MK_n$.

La siguiente aproximación u_{n+1} será de la forma $u_{n+1} = u_n + v$, donde v se obtiene resolviendo aproximadamente la ecuación linealizada

$$\mathfrak{F}'(u_n)v + \mathfrak{F}(u_n) = f,$$

es decir, por el método de Newton.

Sea $g = f - \mathfrak{F}(u_n)$. Entonces

$$\|g\|_0 \leq K_n^{-\lambda}, \qquad \|g\|_s \leq \|\mathfrak{F}(u_n)\|_s + \|f\|_s \leq MK_n + MK_0 \leq 2MK_n.$$

Por las propiedades (3.4) y (3.5) con el g anterior y con $u = u_n$, para cada $Q > 1$ existe v que satisface:

$$\|\mathfrak{F}'(u_n)v + \mathfrak{F}(u_n) - f\|_0 \leq 2Mk_nQ^{-\mu}, \tag{3.14}$$

$$\|v\|_r \leq 2MK_nQ, \tag{3.15}$$

$$\|v\|_0 \leq \|\mathfrak{F}'(u_n)v\|_0. \tag{3.15'}$$

De (3.14) y (3.15') obtenemos

$$\|v\|_0 \leq \|\mathfrak{F}'(u_n)v\|_0 \leq \|\mathfrak{F}(u_n) - f\|_0 + 2MK_nQ^{-\mu} \leq K_n^{-\lambda} + 2MK_nQ^{-\mu},$$

entonces elegimos Q tal que

$$2MK_nQ^{-\mu} < K_n^{-\lambda} \tag{3.16}$$

y obtenemos así

$$\|u_{n+1} - u_n\|_0 = \|v\|_0 < 2K_n^{-\lambda},$$

probando de esta manera la segunda desigualdad de (3.13).

La última de estas desigualdades se consigue de (3.15) eligiendo Q de tal forma que

$$2MK_nQ \leq \frac{1}{2}K_{n+1}. \tag{3.17}$$

Finalmente verificamos la primera de las desigualdades de (3.13) a partir de (3.14) y (3.6)

$$\begin{aligned}
\|\mathfrak{F}(u_{n+1}) - f\|_0 &= \|\mathfrak{F}(u_n + v) - f\|_0 \\
&= \|Q(u_n, v) + \mathfrak{F}(u_n) + \mathfrak{F}'(u_n)v - f\|_0 \\
&\leq M\|v\|_0^{2-\beta}\|v\|_r^{\beta} + 2MK_nQ^{-\mu} \\
&\leq M(2K_n^{-\lambda})^{2-\beta}(2MK_nQ)^{\beta} + 2MK_nQ^{-\mu} \\
&\leq 2M\Big[M^{\beta}K_n^{-\lambda(2-\beta)}(K_nQ)^{\beta} + K_nQ^{-\mu}\Big] \\
&\leq C\Big[K_n^{-\lambda(2-\beta)}(K_nQ)^{\beta} + K_nQ^{-\mu}\Big],
\end{aligned}$$

donde $C > M$ depende únicamente de M y de los exponentes.

El teorema quedará probado si podemos elegir Q de tal forma que se cumplan (3.16), (3.17) y la desigualdad

$$C\Big[K_n^{-\lambda(2-\beta)}(K_nQ)^\beta + K_nQ^{-\mu}\Big] \leq K_{n+1}^{-\lambda}.$$

Como $K_{n+1} > K_n$, entonces $K_{n+1}^{-\lambda} \leq K_n^{-\lambda}$ y por tanto la última desigualdad implica (3.16).
Luego basta hallar Q tal que las tres desigualdades siguientes se cumplan:

$$\begin{cases} CK_nQ < K_{n+1}, \\ C(K_nQ)^\beta K_n^{-\lambda(2-\beta)} < K_{n+1}^{-\lambda}, \\ CK_nQ^{-\mu} < K_{n+1}^{-\lambda}. \end{cases} \tag{3.18}$$

Las dos primeras desigualdades son estimativos superiores para Q, mientras que la tercera nos muestra una cota inferior para Q.

Usamos $K_{n+1} = K_n^x$ y expresamos las desigualdades en términos de potencias de $K = K_n$, las cuales se eligen suficientemente grandes.
Comparando exponentes en (3.18), encontramos que

a) Si tomamos
$$x\lambda + 1 < \mu(x-1), \tag{a}$$
entonces $K_n^{x\lambda+1} < K_n^{\mu(x-1)}$ y tendríamos que buscar Q tal que
$$CK_n^{x\lambda+1} < Q^\mu \text{ y } C^\mu Q^\mu < K_n^{\mu(x-1)},$$
lo cual conduce a
$$CK_nQ^{-\mu} < K_n^{-x\lambda} \text{ y } CQ < K_n^{x-1},$$
por lo tanto
$$CK_nQ^{-\mu} < K_{n+1}^{-\lambda} \text{ y } CK_nQ < K_{n+1},$$
que corresponden a la primera y tercera desigualdad de (3.18).

b) Tomando
$$x\lambda + 1 < \mu\Big[\frac{\lambda(2-\beta)}{\beta} - 1 - \frac{x\lambda}{\beta}\Big], \tag{b}$$
es decir si
$$\frac{x\lambda+1}{\mu} < \frac{\lambda(2-\beta)-\beta-\lambda x}{\beta},$$
debemos escoger Q tal que
$$C^{\frac{1}{\beta}}Q < K_n^{\frac{\lambda(2-\beta)-\beta-\lambda x}{\beta}},$$

así

$$CQ^\beta < K_n^{\lambda(2-\beta)-\beta-\lambda x},$$

$$CQ^\beta K_n^{-\lambda(2-\beta)+\beta} < K_n^{-\lambda x},$$

lo cual nos lleva a la segunda desigualdad de (3.18)

$$C(K_n Q)^\beta K_n^{-\lambda(2-\beta)} < K_{n+1}^{-\lambda}.$$

c) Adicionando $x-1$ en la desigualdad (a) obtenemos $x(\lambda+1) < (\mu+1)(x-1)$, es decir

$$\frac{x}{x-1} < \frac{\mu+1}{\lambda+1}. \tag{3.19”}$$

d) Reescribiendo la desigualdad (b) obtenemos

$$x\lambda + 1 < \mu\big[-(1+\lambda) + (2-x)\frac{\lambda}{\beta}\big].$$

Un requerimiento fuerte para $x > 1$ es que satisfaga

$$x(\lambda+1) < \mu\big[-x(1+\lambda) + (2-x)\frac{\lambda}{\beta}\big],$$

por lo tanto

$$x(\lambda+1)(\mu+1) < (2-x)\frac{\mu\lambda}{\beta},$$

obteniendo entonces

$$\frac{(\lambda+1)}{\lambda}\frac{(\mu+1)}{\mu}\beta < \frac{2-x}{x}. \tag{3.19’}$$

De esta forma Q puede ser hallado si

$$\begin{cases} \frac{2-x}{x} > \frac{\lambda+1}{\lambda}\frac{\mu+1}{\mu}\beta \\ \frac{x}{x-1} < \frac{\mu+1}{\lambda+1} \end{cases} \tag{3.19}$$

o

$$\frac{(\lambda+1)}{\lambda}\frac{(\mu+1)}{\mu}\beta < \frac{2}{x} - 1 < 2\big(1 - \frac{\lambda+1}{\mu+1}\big) - 1 = 1 - 2\frac{\lambda+1}{\mu+1}.$$

Esto muestra que asumiendo (3.8) y (3.9) podemos hallar x que satisfaga (3.19) y

$$1 < \Big(1 - \frac{\lambda+1}{\mu+1}\Big)^{-1} < x < 2.$$

Luego las desigualdades (3.18) son compatibles si elegimos K_0 (que depende de M, β, λ, μ) suficientemente grande. Esto completa la prueba de (3.13).

De este resultado se obtiene

$$\|u_{n+1}\|_r \leq \|u_0\|_r + \sum_{j=1}^{n+1} \|u_j - u_{j-1}\|_r \leq K_0 + \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{2} K_j < K_{n+1},$$

si K_0 es suficientemente grande, lo cual prueba la segunda parte de (3.11).

Finalmente de

$$\|v\|_{\rho'} \leq \|v\|_0^{1-\frac{\rho'}{r}} \|v\|_r^{\frac{\rho'}{r}},$$

tenemos

$$\|u_{n+1} - u_n\|_{\rho'} \leq c K_n^{-(1-\frac{\rho'}{r})\lambda + \frac{\rho'}{r} x},$$

la cual tiene exponente negativo si $\frac{\rho'}{r} < \frac{\lambda}{\lambda + x}$, y de esta manera u_n converge a un elemento u de $V^{\rho'}$.

Si K_0 es suficientemente grande tenemos

$$\|u - u_0\|_0 \leq \sum_{m=1}^{\infty} \|u_m - u_{m-1}\|_0 < 1,$$

lo cual indica que $\mathfrak{F}(u)$ está definida, y por ser $\mathfrak{F}$ continua como función de $V^{\rho'}$ en G^0, de (3.13) concluimos que $\mathfrak{F}(u) = f$. $\square$

BIBLIOGRAFIA

1. R. A. Adams, *Sobolev Spaces* (1978), Academic Press, Inc., New York.
2. L. Ahlfors, *Complex analysis* (1979), McGraw-Hill, Inc., Singapore.
3. H. Brézis, *Análisis funcional* (1983), Alianza Editorial, Madrid.
4. J.F. Caicedo, *Cálculo Avanzado* (1993), Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.
5. R. Duque, *Solución de algunos sistemas simétricos positivos no lineales con un método iterativo de convergencia rápida*, Tesis (2001), Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.
6. K.O. Friedrichs, *Symmetric Positive Linear Differential Equations*, Comm. on pure and applied math. **XI** (1958), 333-418.
7. O.H. Hald, *On a Newton-Moser Type Method*, Numer. Math. **23** (1975), 411-426.
8. F. John, *Partial differential equations* (1978), Springer-Verlag, New York.
9. L. Nirenberg, *On elliptic partial differential equations*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **Ser. 3** (1959), pg.116-162.
10. K. Rektorys, *Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering* (1980), Reidel Publishing Company, Dordrecht-Holland.
11. G.P. Tolstov, *Fourier Series* (1962), Dover Publications, New York.