Boletín de Matemáticas
Nueva Serie, Volumen X No. 1 (2003), pp. 21–30

ALGUNOS RESULTADOS SOBRE ESPACIOS PONDERADOS

GERARDO ARANGO OSPINA (*)
JUAN ANTONIO LÓPEZ MOLINA
MARÍA JOSÉ RIVERA ORTIZ (**)

Resumen. En un trabajo anterior [2], los autores obtuvieron algunos resultados sobre espacios L_p ponderados para usarlos en la construcción de medidas conmensurables en algunos espacios medibles, resultados que son conocidos para los espacios L_p, pero no en espacios L_p ponderados. El propósito del artículo es dar a conocer esos resultados.

Abstract In a previous work, [2] the authors obtained some results on weighted L_p spaces to be used in the construction of conmeasurable measures in some measurable spaces. The results are similar to known results on L_p spaces. The purpose of this article is to make them available.

Palabras clave. Espacios L_p ponderados.

Key words. Weighted L_p spaces.

1. Introducción

En el artículo se utiliza la estructura reticular de los espacios estudiados, por lo cual se requiere el conocimiento de algunos conceptos elementales sobre el

(*) Gerardo Arango. Universidad EAFIT, Departamento de Ciencias Básicas, Medellín, Colombia.
e-mail: garango@eafit.edu.co
(**) Juan Antonio López Molina y María José Rivera. Universidad Politécnica de Valencia, E.T.S., Ingenieros Agrónomos, Camino de Vera 46072 Valencia, España.
e-mails: jalopez@mat.upv.es, mjrivera@mat.upv.es

El presente trabajo ha sido financiado por el Proyecto COLCIENCIAS-Universidad EAFIT Código: 1216-05-11456.

tema, que se resumen en esta sección. Al respecto puede consultarse alguna de las referencias [1], [5], [6], [7].

Definición 1. *Un* espacio vectorial real ordenado *es aquel en el que existe una relación de orden parcial $\leq$ compatible con la estructura lineal.*

Definición 2. *Un* retículo lineal *es un espacio vectorial real ordenado E en el que los elementos*

$$x \vee y := \sup\{x, y\}$$

y

$$x \wedge y := \inf\{x, y\}$$

existen en E, para todo $x, y \in E$.

En un retículo lineal, se dice que un elemento x es *positivo* si $0 \leq x$ y se dice que es *negativo* si $x \leq 0$. Al conjunto de todos los elementos positivos se le llama el *cono positivo* de E y se denota por E^+. Dado un elemento cualquiera $x \in E$, $x^+ := x \vee 0$, $x^- := (-x) \vee 0$ y su *módulo* es $|x| := x \vee (-x)$.

Definición 3. *Una aplicación lineal $T : E \to F$ entre dos retículos lineales E y F es un* homomorfismo de orden *si $\forall x, y \in E$, $T(x \wedge y) = T(x) \wedge T(y)$ (y por lo tanto $T(x \vee y) = T(x) \vee T(y)$). Si además T es inyectiva, se dice que T es un* isomorfismo de orden.

Dos retículos lineales E y F se dice que son orden isomórficos*, si existe un isomorfismo de orden de E sobre F.*

Definición 4. *Un conjunto A de un retículo lineal E se dice que es* sólido *si $\forall x \in A$ y $\forall y \in E$, tales que $|y| \leq |x|$, se verifica que $y \in A$.*

Un ejemplo de conjunto sólido en un retículo lineal E es el *orden intervalo* $[-a, a]$ para cualquier elemento positivo $a \in E$.

Definición 5. *Un subespacio vectorial I de un retículo lineal E se dice que es un subretículo si es cerrado con respecto a la operación $\wedge$ (y, por lo tanto, a la operación $\vee$).*

Definición 6. *Un subretículo I de un retículo lineal E se dice que es un* ideal *si es sólido.*

Dado un subconjunto B de un retículo lineal E, llamamos *ideal generado* por B al menor ideal de E que contiene a B. Al ideal generado por un solo elemento $a \in E$ se le llama *ideal principal* y lo denotaremos $I(a)$. Se verifica trivialmente que si a es positivo, entonces $I(a) = \bigcup_{n=1}^{\infty} n[-a, a]$.

Definición 7. *Dos elementos x, y de un retículo lineal E se dice que son* ortogonales *o* disjuntos*, $x \perp y$, si $|x| \wedge |y| = 0$. Se dice que dos conjuntos de E son* ortogonales *si cada elemento de uno es ortogonal a todos los elementos del otro.*

Definición 8. *Un ideal I de un retículo lineal E se dice que es una* banda*, si es cerrado respecto de la formación de supremos de subconjuntos de I que existan en E.*

Si $A \subset E$, denotamos $A^{\perp}$ al conjunto de los elementos de E que son ortogonales a todos los de A. Se verifica que $A^{\perp}$ es una banda y que si I es un ideal tal que $E = I + I^{\perp}$, entonces $I = I^{\perp\perp}$ y por lo tanto es una banda. En ese caso existe una proyección $P : E \to I$ tal que $Ker(P) = I^{\perp}$ y se dice que I es una *banda proyección* y que P es una *proyección de banda*.

Definición 9. *Un retículo lineal se dice que es* orden completo *(o* Dedekind completo*) si para todo conjunto no vacío mayorado, su supremo es un elemento del espacio.*

Definición 10. *Un* retículo lineal topológico *es un retículo lineal dotado de una topología de Hausdorff que posee una base de entornos de cero que son conjuntos sólidos.*

Definición 11. *Una seminorma (resp. norma) $p(.)$ en un retículo lineal topológico se dice que es una* seminorma *(*resp. norma*)* de retículo *si $|x| \leq |y|$ implica que $p(x) \leq p(y)$. Un retículo se dice que es* normado *si su topología viene dada mediante una norma de retículo. Si además es completo, diremos que el retículo es de* Banach.

Un retículo orden completo verifica que cualquier ideal cerrado de E es una banda y que cualquier banda de E es un subespacio complementado, es decir, es una banda proyección.

Definición 12. *Un retículo de Banach se dice que tiene norma* orden continua *si cada filtro convergente en orden converge también en norma.*

Definición 13. *Un retículo de Banach E se dice que es*

i) un espacio L_p abstracto*, para algún $1 \leq p < \infty$ siempre y cuando su norma es p-*aditiva*, es decir, cuando*

$$\|x + y\|^p = \|x\|^p + \|y\|^p$$

se cumple para todo $x, y \in E^+$ *tales que* $x \wedge y = 0$.
ii) un M-espacio abstracto*, siempre y cuando su norma es una* M*-norma, es decir, cuando* $x \wedge y = 0$ *en* E *implica que*

$$\|x \vee y\| = \text{máx}\{\|x\|, \|y\|\}.$$

Los espacios L_p-abstractos, $1 \leq p < \infty$ son ejemplos de retículos de Banach orden completos y orden continuos. También son orden completos los espacios $L_\infty(\mu)$ donde μ es una medida σ-finita e incluso si el espacio medida es localizable. Un espacio M-abstracto no es en general orden continuo; sólo lo es si es isomorfo a $c_0(\Gamma)$ para algún conjunto de índices Γ. Se verifica además que si un retículo de Banach tiene norma orden continua, entonces es orden completo.
A la banda generada por un elemento $a \in E$ la denotamos $B(a)$. Si E es un retículo de Banach, toda banda es un subespacio cerrado. Obviamente si I es un ideal en un retículo de Banach E, su clausura $\overline{I}$ (en E) es también un ideal cerrado en E; si E tiene norma orden continua, $\overline{I}$ es además una banda.

2. Resultados sobre espacios ponderados

Sobre espacios L_p existe una buena cantidad de textos, entre ellos recomendamos [3] y [4].
Dado un espacio de medida (Ω, Σ, μ), una función medible g, no necesariamente acotada, estrictamente positiva μ-casi en todas partes y $1 \leq p \leq \infty$, denotamos por $L_p(\Omega, \Sigma, g, \mu)$ al espacio ponderado de $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ mediante la función g, es decir, el espacio de las funciones medibles f tales que $fg \in L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$, dotado con la topología de la norma

$$\|f\|_{L_p(\Omega,\Sigma,g,\mu)} = \|fg\|_{L_p(\Omega,\Sigma,\mu)}.$$

Si no hay posibilidad de confusión al espacio $L_p(\Omega, \Sigma, g, \mu)$ lo denotaremos simplemente por $L_p(g, \mu)$.
Bajo las condiciones anteriores, denotamos por $\mathcal{T}_{(\Omega,\Sigma,\mu)}$ al subespacio de (Ω, Σ, μ) de funciones simples con soporte de medida finita, es decir,

$$\mathcal{T}_{(\Omega,\Sigma,\mu)} := \left\{ f = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i} : a_i \in \mathbb{R},\ A_i \in \Sigma,\ \mu(A_i) < \infty;\ \forall i = 1, .., n,\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

donde χ_{A_i} es la función característica del conjunto A_i. Cuando no haya lugar a confusión, omitiremos uno o más de los subíndices de $\mathcal{T}_{(\Omega,\Sigma,\mu)}$.

Proposición 14. *Sea* (Ω, Σ, μ) *un espacio de medida* σ*-finita. Se verifican:*

1) $L_p(g, \mu)$ *es orden completo si* $1 \leq p \leq \infty$.
2) $\mathcal{T}_{(\Omega,\Sigma,\mu)}$ *es denso en* $L_p(g, \mu)$ *para* $1 \leq p < \infty$.
3) $(L_\infty(g, \mu))' = L_1(1/g, \mu) \oplus L_1(1/g, \mu)^\perp$.

4) $(L_1(\mu)+L_\infty(g,\mu))' = L_\infty(\mu)\cap L_1(1/g,\mu)$.
5) $((L_1(\mu),L_\infty(g,\mu))_{1-\sigma,\infty})' = (L_\infty(\mu),L_1(1/g,\mu))_{1-\sigma,1}$.

Demostración.

1) Es evidente porque si $1\le p<\infty$, $L_p(g,\mu)$ es un espacio L_p-abstracto y si $p=\infty$, la aplicación multiplicación por g de $L_\infty(g,\mu)$ en $L_\infty(\mu)$, por definición de la norma $\|.\|_{L_\infty(g,\mu)}$, es una isometría y por lo tanto $L_\infty(g,\mu)$ es orden completo.
2) Para cada $n\in\mathbb{N}$, sea $\Omega_n := \{\omega\in\Omega : g(\omega)\in[1/n,n]\}$ y $\Omega_0 := \emptyset$. Entonces $\Omega=\cup_{n=1}^\infty\Omega_n$. Sea $f\in L_p(g,\mu)$. Como

$$\int_\Omega |fg|^p d\mu = \sum\nolimits_{n=1}^\infty \int_{\Omega_n-\Omega_{n-1}} |fg|^p d\mu < \infty,$$

dado $\epsilon>0$, existe n_0 tal que $\int_{\Omega-\Omega_{n_0}} |fg|^p d\mu < \frac{\epsilon}{2}$. Como $fg\chi_{\Omega_{n_0}}\in L_p(\mu)$ y $|fg\chi_{\Omega_{n_0}}| \ge \frac{1}{n_0}|f\chi_{\Omega_{n_0}}|$, entonces $f\chi_{\Omega_{n_0}}\in L_p(\mu)$, o lo que es lo mismo $f\in L_p(\Omega_{n_0},\mu)$, por lo que existe una función simple $S=\sum_{i=1}^m a_i\chi_{A_i}$, $A_i\in\Sigma_{\restriction\Omega_{n_0}}$, $i=1,..,m$ tal que $\|f-S\|_{L_p(\Omega_{n_0},\mu)} < \frac{\epsilon}{2n_0}$. Además $\|(f-S)g\|_{L_p(\Omega_{n_0},\mu)} \le \frac{\epsilon}{2}$. Entonces

$$\begin{aligned}\|(f-S)g\|_{L_p(\mu)} \le \|(f-S)g\|_{L_p(\Omega_{n_0},\mu)} &+ \|fg\|_{L_p(\Omega-\Omega_{n_0},\mu)}\\ &+ \|Sg\|_{L_p(\Omega-\Omega_{n_0},\mu)}\\ &< \epsilon.\end{aligned}$$

3) Fijando $h\in L_\infty(g,\mu)$ y dado cualquier $f\in L_1(1/g,\mu)$, la aplicación $<f,h>=\int_\Omega fh d\mu$ define una forma lineal continua sobre $L_1(1/g,\mu)$. Se demuestra en la forma usual que $f\mapsto <f,\cdot>$ define un orden isomorfismo isométrico $(L_1(1/g,\mu))' = L_\infty(g,\mu)$ y por lo tanto $L_1(1/g,\mu)$ es un subespacio isométrico de su bidual que es $(L_\infty(g,\mu))'$; como éste es orden completo por ser un espacio L_p-abstracto, entonces $L_1(1/g,\mu)$ es además una banda proyección, por lo cual

$$(L_\infty(g,\mu))' = L_1(1/g,\mu)\oplus L_1(1/g,\mu)^\perp.$$

4) Si $f\in L_\infty(\mu)\cap L_1(1/g,\mu)$ y $h\in L_1(\mu)+L_\infty(g,\mu)$, para cada representación de $h=a+b$, $a\in L_1(\mu)$, $b\in L_\infty(g,\mu)$,

$$\begin{aligned}| < f, h > | &= |< f, a >| + |< f, b >| \\ &\leq \|f\|_{L_\infty(\mu)} \|a\|_{L_1(\mu)} + \|f\|_{(L_\infty(g,\mu))'} \|b\|_{L_\infty(g,\mu)} \\ &\leq \|f\|_{L_\infty(\mu) \cap L_1(1/g,\mu)} (\|a\|_{L_1(\mu)} + \|b\|_{L_\infty(g,\mu)}),\end{aligned}$$

luego

$$\|f\|_{(L_1(\mu)+L_\infty(g,\mu))'} \leq \|f\|_{L_\infty(\mu) \cap L_1(1/g,\mu)}.$$

Pero además como

$$\begin{aligned}\|f\|_{L_1(1/g,\mu)} &= \|f\|_{(L_\infty(g,\mu))'} \\ &= \sup\{| < f, a > | : \|a\|_{L_\infty(g,\mu)} \leq 1\} \\ &\leq \sup\{| < f, b > | : \|b\|_{L_1(\mu)+L_\infty(g,\mu)} \leq 1\} \\ &= \|f\|_{(L_1(\mu)+L_\infty(g,\mu))'}\end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned}\|f\|_{L_\infty(\mu)} &= \sup\{| < f, c > | : \|c\|_{L_1(\mu)} \leq 1\} \\ &\leq \sup\{| < f, d > | : \|d\|_{L_1(\mu)+L_\infty(g,\mu)} \leq 1\} \\ &= \|f\|_{(L_1(\mu)+L_\infty(g,\mu))'},\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}\|f\|_{L_\infty(\mu) \cap L_1(1/g,\mu)} &= \max\{\|f\|_{L_\infty(\mu)}, \|f\|_{L_1(1/g,\mu)}\} \\ &\leq \|f\|_{(L_1(\mu)+L_\infty(g,\mu))'}.\end{aligned}$$

Entonces $L_\infty(\mu) \cap L_1(1/g, \mu)$ es un subespacio normado de $(L_1(\mu) + L_\infty(g, \mu))'$.
Además si $f \in (L_1(\mu) + L_\infty(g, \mu))'$, entonces $f \in L_\infty(\mu)$ y $f \in (L_\infty(g, \mu))'$, con lo que $f \in L_\infty(\mu) \cap (L_\infty(g, \mu))'$. Pero

$$L_\infty(\mu) \cap (L_\infty(g, \mu))' = L_\infty(\mu) \cap (L_1(1/g, \mu) \oplus L_1(1/g, \mu)^\perp).$$

Si $h \in L_\infty(\mu) \cap L_1(1/g, \mu)^\perp$ y $\{\Omega_n, n \in \mathbb{N}\}$ es una partición de Ω formada por conjuntos de medida finita de Σ, entonces $h \wedge \chi_{\Omega_n} g = 0$, por lo tanto $h \wedge g = 0$ y de ahí que $h = 0$. Luego

$$L_\infty(\mu) \cap (L_1(1/g, \mu) \oplus L_1(1/g, \mu)^\perp) = L_\infty(\mu) \cap L_1(1/g, \mu).$$

Por lo tanto $(L_1(\mu)+L_\infty(g, \mu))' = L_\infty(\mu) \cap L_1(1/g, \mu)$ isométricamente.

5) La prueba de que $((L_1(\mu), L_\infty(g,\mu))_{1-\sigma,\infty})' = (L_\infty(\mu), L_1(1/g,\mu))_{1-\sigma,1}$ es análoga a la que sirve para probar que

$$((L_1(\mu), L_\infty(\mu))_{1-\sigma,\infty})' = (L_\infty(\mu), L_1(\mu))_{1-\sigma,1},$$

teniendo en cuenta las anotaciones hechas en las pruebas de 3) y 4).

□

Sea Z un subespacio lineal topológico cerrado de $L_\infty(g,\mu)$. Entonces

Corolario 15. *$(L_1(\mu)+Z)'$ es isométricamente isomorfo a $L_\infty(\mu)\cap Z'$.*

Demostración.
Si $f \in L_\infty(\mu)\cap Z'$ y $h \in L_1(\mu)+Z$, para cada representación de $h = a+b$, $a \in L_1(\mu)$, $b \in Z$,

$$\begin{aligned} |<f,h>| &\leq |<f,a>| + |<f,b>| \\ &\leq \|f\|_{L_\infty(\mu)}\|a\|_{L_1(\mu)} + \|f\|_{Z'}\|b\|_Z \\ &\leq \|f\|_{L_\infty(\mu)\cap Z'}(\|a\|_{L_1(\mu)} + \|b\|_Z), \end{aligned}$$

luego

$$\|f\|_{(L_1(\mu)+Z)'} \leq \|f\|_{L_\infty(\mu)\cap Z'}.$$

Pero además como si $f \in (L_1(\mu)+Z)'$, se verifica que

$$\begin{aligned} \|f\|_{Z'} &= \sup\{|<f,a>| : \|a\|_Z \leq 1\} \\ &\leq \sup\{|<f,b>| : \|b\|_{L_1(\mu)+Z} \leq 1\} \\ &= \|f\|_{(L_1(\mu)+Z)'} \end{aligned}$$

y también que

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_\infty(\mu)} &= \sup\{|<f,c>| : \|c\|_{L_1(\mu)} \leq 1\} \\ &\leq \sup\{|<f,d>| : \|d\|_{L_1(\mu)+L_\infty(g,\mu)} \leq 1\} = \|f\|_{(L_1(\mu)+Z)'}, \end{aligned}$$

luego

$$\|f\|_{L_\infty(\mu)\cap Z'} = \text{máx}\{\|f\|_{L_\infty(\mu)}, \|f\|_{Z'}\} \leq \|f\|_{(L_1(\mu)+L_\infty(g,\mu))'}.$$

Entonces $L_\infty(\mu)\cap Z' = (L_1(\mu)+Z)'$. □

Supongamos que Z es un subespacio normado de $L_\infty(g,\mu)$, y que contiene a $\mathcal{T}_{(\Omega,\Sigma,\mu)}$. Sabemos que

$$Z' = (L_\infty(g,\mu))'/Z^0 = (L_1(1/g,\mu) \oplus L_1(1/g,\mu)^\perp)/Z^0,$$

donde Z^0 es el polar de Z en $(L_\infty(g,\mu))'$, es decir el conjunto de las formas lineales y continuas sobre $L_\infty(g,\mu)$ que se anulan en Z.

Proposición 16. $Z^0 \subset L_1(1/g,\mu)^\perp$.

Demostración.
A partir de las definiciones de banda y de Z^0, se deduce directamente que Z^0 es una banda de $(L_\infty(g,\mu))'$. Sean

$$f \in Z^0 \subset L_1(1/g,\mu) \oplus L_1(1/g,\mu)^\perp$$

y $f = a + b$ la representación tal que $a \in L_1(1/g,\mu)$ y $b \in L_1(1/g,\mu)^\perp$. Como a y b son disjuntos, $|a| \wedge |b| = 0$ y $|a+b| = |a| \vee |b| \in Z^0$, entonces para cada conjunto de medida finita A,

$$\begin{aligned} 0 &= \ < |a| \vee |b|, \chi_A > \\ &= \text{máx}\{< |a|, \chi_A >, < |b|, \chi_A >\} \\ &= \text{máx}\left\{ \int_A |a| d\mu, < |b|, \chi_A > \right\}. \end{aligned}$$

De ahí que $\int_A |a| d\mu = 0$, lo que implica que $a = 0$ μ-casi en todas partes, es decir $f \in L_1(1/g,\mu)^\perp$. □

Corolario 17. $Z' = L_1(1/g,\mu) \oplus \dfrac{(L_1(1/g,\mu))^\perp}{Z^0}$.

Corolario 18. $Z' \cap L_\infty(\mu) = L_1(1/g,\mu) \cap L_\infty(\mu)$.

Corolario 19. *La inclusión canónica de $L_1(\mu) + Z$ en $L_1(\mu) + L_\infty(g,\mu)$ es una isometría.*

Demostración.
Es evidente porque ambos espacios tienen el mismo dual. □

Proposición 20. *Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida. Se cumple que $\mathcal{T}_{(\Omega,\Sigma,\mu)}$ es denso en $L_1(1/g,\mu) \cap L_\infty(\mu)$ en los siguientes casos:*

a) *Si el espacio es de medida finita.*

b) *Si g es acotada y el espacio es de medida σ-finita.*

Demostración.
Es suficiente demostrar la proposición para $f > 0$. Sea (g_n) una sucesión creciente de funciones simples que converge uniformemente hacia f.

a) Teniendo en cuenta que $(f-g_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión positiva decreciente de $L_1(1/g,\mu)$ y tiene ínfimo cero; entonces, como la norma de $L_1(1/g,\mu)$ es orden continua, la sucesión converge a cero en $L_1(1/g,\mu)$. Por lo tanto $(f-g_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a cero en $L_1(1/g,\mu)\cap L_\infty(\mu)$.

b) Dado $\epsilon>0$, sea n_0 tal que si $n\geq n_0$, $\|f-g_n\|_{L_\infty(\mu)}<\frac{\epsilon}{2}$. Como el espacio de medida es σ-finito, sea $A_0\in\Sigma$, $\mu(A_0)<\infty$ tal que $\|f\chi_{\Omega-A_0}\|_{L_1(1/g,\mu)}<\frac{\epsilon}{2}$.

Veamos primero que $f\chi_{A_0}$ es límite en $L_1(1/g,\mu)\cap L_\infty(\mu)$ de funciones simples con soporte de medida finito. Claramente si $n\geq n_0$, $\|f\chi_{A_0}-g_n\chi_{A_0}\|_{L_\infty(\mu)}<\frac{\epsilon}{2}$. Pero además $(f\chi_{A_0}-g_n\chi_{A_0})_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión positiva decreciente de $L_1(1/g,\mu)$ y tiene ínfimo cero; entonces, como la norma de $L_1(1/g,\mu)$ es orden continua, la sucesión converge a cero en $L_1(1/g,\mu)$. Por lo tanto $(f\chi_{A_0}-g_n\chi_{A_0})_{n=1}^{\infty}$ converge a cero en $L_1(1/g,\mu)\cap L_\infty(\mu)$.

Veamos ahora que $f\chi_{\Omega-A_0}$ es también límite en $L_1(1/g\mu)\cap L_\infty(\mu)$ de funciones simples con soporte de medida finito. Si $n>n_0$,

$$\|f\chi_{\Omega-A_0}-g_n\chi_{\Omega-A_0}\|_{L_\infty(\mu)}<\frac{\epsilon}{2}$$

y también $\|f\chi_{\Omega-A_0}-g_n\chi_{\Omega-A_0}\|_{L_1(1/g,\mu)}\leq\|f\chi_{\Omega-A_0}\|_{L_1(1/g,\mu)}<\frac{\epsilon}{2}$.

Sea $D_h=\{\omega\in D_\Omega-A_0: f(\omega)\in[1/h,\|f\|_{L_\infty(\mu)}]\}$. El conjunto D_h tiene medida finita para todo h, ya que si $\|g\|_{L_\infty(\mu)}=a$

$$\infty>\int_\Omega f/gd\mu\geq\int_{D_h}f/gd\mu\geq\mu(D_h),1/(ha).$$

Entonces

$$\|f\chi_{\Omega-A_0}-g_n\chi_{D_h}\|_{L_\infty(\mu)}\leq\|f\chi_{D_h}-g_n\chi_{D_h}\|_{L_\infty(\mu)}+\|f\chi_{\Omega-A_0-D_h}\|_{L_\infty(\mu)}.$$

El segundo sumando es menor que $1/h$, que tomando h suficientemente grande puede hacerse menor que $\frac{\epsilon}{2}$. Para ese h el primer sumando puede hacerse menor que $\frac{\epsilon}{2}$ tomando $n\geq n_0$. Por otra parte para ese h,

$$\|f\chi_{\Omega-A_0}-g_n\chi_{D_h}\|_{L_1(1/g,\mu)}\leq\|f\chi_{\Omega-A_0}\|_{L_1(1/g,\mu)}<\frac{\epsilon}{2}.$$

□

Lema 21. *Sean (O,S,m) y (Ω,Σ,μ) dos espacios de medida. Supongamos que existe una aplicación biyectiva $F:S\to\Sigma$ tal que*

a) *F y F^{-1} aplican conjuntos de medida nula en conjuntos de medida nula.*
b) $F(\cap_{i=1}^{n} A_i) = \cap_{i=1}^{n} F(A_i)$.
c) $F(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \cup_{i=1}^{\infty} F(A_i)$.

Entonces se puede establecer una aplicación biyectiva entre las funciones medibles de uno y otro y $L_\infty(O, S, m)$ y $L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ son isométricamente isomorfos mediante una isometría positiva.

Demostración.
Sean $\mathcal{S}_S$ y $\mathcal{S}_\Sigma$ los respectivos conjuntos de funciones simples y sea $H : \mathcal{S}_S \to \mathcal{S}_\Sigma$ tal que $H(\sum_{i=1}^{n} a_i\chi_{A_i}) = \sum_{i=1}^{n} a_i\chi_{F(A_i)}$.
Si f es una función positiva m-medible, sea $(\sum_{i=1}^{m_n} a_i^n\chi_{A_i^n})_{n=1}^{\infty}$ una sucesion creciente de funciones simples no negativas que converge puntualmente hacia f. Definimos $H(f)$ como el límite puntual de la sucesión μ-medible

$$(\sum_{i=1}^{m_n} a_i^n\chi_{F(A_i^n)})_{n=1}^{\infty}.$$

Si además f es acotada, $(\sum_{i=1}^{m_n} a_i^n\chi_{A_i^n})_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a f en O por lo tanto la convergencia de $(\sum_{i=1}^{m_n} a_i^n\chi_{F(A_i^n)}))_{n=1}^{\infty}$ hacia $H(f)$ es uniforme en Ω, luego $H(f)$ está acotada, con $\|f\|_{L_\infty(m)} = \|f\|_{L_\infty(\mu)}$. Como cada función medible es la diferencia de dos funciones medibles positivas, el lema queda probado. □

Bibliografía

[1] C. D. Aliprantis y O. Burkinshaw, *Positive operators*. Academic Press. New York, London, 1985.

[2] G. Arango Ospina, *Ideales de operadores* $(1,\sigma)$*-absolutamente continuos*. Tesis Doctoral. Universidad Politécnica de Valencia. Valencia, 2000.

[3] D. U. Cohn, *Measure Theory*. Birkhäuser. Boston, Basilea, Stuttgart. 1980.

[4] E. Hewitt K. Stromberg, *Real and Abstract Analysis*. Springer-Verlag. Berlin-Heidelberg.1965.

[5] H. E. Lacey, *The Isometric Theory of Classical Banach Spaces*. Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg, New York. 1974.

[6] J. Lindenstrauss y L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces II*. Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg, New York, 1979.

[7] H. H. Schaefer, *Banach Lattices and Positive Operators*. Springer-Verlag. New York. 1974.