Boletín de Matemáticas
Nueva Serie, Volumen X No. 1 (2003), pp. 13–20

ACERCA DEL ARTÍCULO *ON THE LOGIC OF NUMBER*, DE CHARLES S. PEIRCE

ARNOLD OOSTRA (*)

Dedicado a la memoria de
nuestro eterno amigo
Edward Pérez

Resumen. Esta es una presentación del notable artículo *On the Logic of Number*, publicado por Charles S. Peirce en 1881 y traducido al español en el Artículo que antecede a éste en el presente número.

Palabras clave. C. S. Peirce; axiomatización de los números naturales; aritmética; conjunto ordenado; conjunto finito.

1. Introducción

En el folclor matemático se acepta de manera generalizada –y un poco simplista– que la axiomatización de los números naturales se debe a Giuseppe Peano en su trabajo de 1889, *Arithmetices Principia Nova Methodo Exposita* – esto es, *Principios de la Aritmética expuestos mediante un Método Nuevo.* Los méritos de este texto son indiscutibles y su influencia en ciertos desarrollos de la lógica, inmensa. Pero la axiomatización de la aritmética en sí era un problema que estaba en el ambiente y que dió lugar a numerosos y excelentes tratados de la literatura matemática. Peano mismo indica que para él fue muy útil el escrito de

(*) Arnold Oostra. Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad del Tolima. Becario de la Fundación Mazda para el Arte y la Ciencia.
A.A. 546 Ibagué, COLOMBIA
e-mail: oostra@bunde.tolinet.com.co .

Richard Dedekind, *Was Sind und Was Sollen die Zahlen? —¿Qué son y para qué sirven los Números?—* publicado en 1888. Tampoco pueden pasarse por alto los trabajos de Gottlob Frege en esta dirección, realizados tres o cuatro años antes. Y ocho años antes del escrito de Peano, en 1881, C. S. Peirce publicó en Norteamérica el breve artículo *On the Logic of Number —Sobre la Lógica del Número—*, que contiene una axiomatización original de la aritmética.

Charles Sanders Peirce —científico, matemático, lógico y filósofo, entre otros—, es considerado uno de los intelectuales más originales y versátiles de América, equiparable a nivel universal solo con Aristóteles y Leibniz. La historia de su trabajo, de su olvido y de la recuperación de su legado ya se ha contado en varias ocasiones anteriores (véase por ejemplo [5, 9, 16, 25, 26]). Aunque en las últimas décadas sus aportes han sido reconocidos y estudiados de manera creciente por filósofos, semiólogos, lingüistas y pedagogos, los lógicos y matemáticos permanecen aún ignorantes e indiferentes a los tesoros que pueden hallarse en su legado. Pues el contenido auténticamente matemático en el trabajo de Peirce no es despreciable [6, 8, 23, 24]. En particular, sobre la axiomatización de la aritmética por Peirce se conoce solo un trabajo anterior [21, 22] aunque ahora se ha elaborado uno en español [2] y el artículo *On the Logic of Number* aparece traducido al español —por primera vez— en este número del *Boletín de Matemáticas*.

Benjamin Peirce, el padre de Charles, fue uno de los más eminentes matemáticos —y maestros de matemática— norteamericanos del siglo XIX. Su texto más destacado se titula *Linear Associative Algebra —Álgebra Lineal Asociativa—*, fue publicado por primera vez en 1870 y entre sus primeras frases contiene la famosa definición:

> La matemática es la ciencia que obtiene conclusiones necesarias.

Después del fallecimiento de Benjamin, ocurrido en 1880, Charles preparó una reedición de este libro para ser publicada en la revista *American Journal of Mathematics*. Aparentemente como un homenaje póstumo a su muy apreciado padre escribió el artículo *On the Logic of Number*, que aparece publicado inmediatamente antes de *Linear Associative Algebra* y cuya tesis central es que la aritmética consiste en conclusiones necesarias. En efecto, en la introducción indica:

> El objetivo de este artículo es mostrar que ellas [las propiedades elementales concernientes al número] son consecuencias estrictamente silogísticas de unas pocas proposiciones primarias.

2. Una lectura

En esta sección se presenta de manera sucinta el contenido del artículo *On the Logic of Number*, traduciéndolo al lenguaje matemático actual (véase también [17]). Aquí las palabras *destacadas* corresponden a la terminología empleada por el autor.

Terminología. Un *sistema de cantidad* es un conjunto ordenado, esto es, dotado de una relación binaria transitiva, reflexiva y antisimétrica [15]. Parece que ésta es la primera ocasión en la literatura matemática en la que estas propiedades aparecen juntas: la definición tan usual de conjunto ordenado se debe a Charles S. Peirce. Un sistema de cantidad es *simple* si es lineal o total; un sistema de cantidad simple es *discreto* si cada elemento no minimal tiene antecesor inmediato; un sistema de cantidad simple discreto es *limitado* si tiene elementos mínimo y máximo, *semi-limitado* si solo tiene mínimo e *ilimitado* si no tiene mínimo ni máximo. Un sistema de cantidad simple discreto semi-limitado es *infinito* si es inductivo: del hecho de que cierta proposición, si es válida para el antecesor inmediato de un elemento también lo es para el mismo elemento, puede inferirse que la proposición, si es válida para algún elemento entonces también lo es para todos sus sucesores.

Los números naturales. Los *números ordinarios* constituyen un sistema de cantidad simple, discreto, semi-limitado e infinito. De esta manera, Peirce axiomatiza los números naturales como un conjunto[1] N dotado de una relación binaria R que satisface las condiciones siguientes.

a) R es un orden lineal en N.
b) N posee elemento mínimo y no posee elemento máximo.
c) Todo elemento de N distinto del mínimo posee antecesor inmediato.
d) Si un subconjunto $S \subseteq N$ satisface:

   para cada $n \in N$, si S contiene el antecesor inmediato de n entonces contiene a n

   entonces S satisface:

   si S contiene un elemento k entonces contiene todos los sucesores de k.

El número mínimo es *uno*, 1. Las relaciones ternarias de adición y multiplicación se definen como sigue —de nuevo, parece que esta es la primera ocasión en la que aparecen definiciones recursivas en matemáticas—:

$$\begin{cases} 1 + y = \text{siguiente}^2 \text{ de } y \\ (1+x) + y = 1 + (x+y) \end{cases} \qquad \begin{cases} 1y = y \\ (1+x)y = y + xy. \end{cases}$$

[1]Por supuesto, Peirce no emplea la terminología actual de conjuntos, elementos, contenencia, etc.

A continuación se demuestra "una selección de proposiciones" acerca de los números. Las pruebas presentadas por Peirce se realizan todas por inducción, como se dice ahora.

1. Ley asociativa de la adición $(x + y) + z = x + (y + z)$.
2. Ley conmutativa de la adición $x + y = y + x$.
3. Ley distributiva, primera cláusula $(x + y)z = xz + yz$.
4. Ley distributiva, segunda cláusula $x(y + z) = xy + xz$.
5. Ley asociativa de la multiplicación $(xy)z = x(yz)$.
6. Ley conmutativa de la multiplicación $xy = yx$.

Los números enteros. Ahora se estudia un sistema de cantidad simple, discreto, ilimitado e *infinito en ambas direcciones*. No hay mínimo pero cierta cantidad se denomina *uno*, 1. Los números mayores o iguales que 1 satisfacen los axiomas de los números naturales luego admiten las operaciones con sus propiedades demostradas. Para extender cualquiera de estas relaciones a todos los números enteros basta probar que si es válida para un número, también lo es para su antecesor inmediato. De esta manera, Peirce axiomatiza los números enteros como un conjunto Z dotado de una relación binaria R que satisface las condiciones siguientes.

a) R es un orden lineal en Z.
b) Z no posee elemento mínimo ni elemento máximo.
c) Todo elemento de Z posee antecesor inmediato.
d) Si un subconjunto $S \subseteq Z$ satisface:
   para cada $m \in Z$, S contiene a m si y sólo si contiene el antecesor inmediato de m
   entonces $S = Z$.

La prueba de que las propiedades de las operaciones válidas para los números naturales se extienden de manera inmediata a los enteros se simplifica en virtud del hecho siguiente.

7. Ley cancelativa de la adición $x + y = x + z$ implica $y = z$.

El antecesor inmediato de 1 se llama *cero*, 0. A continuación Peirce demuestra estas propiedades adicionales.

8. $x + 0 = x$.
9. $x0 = 0$.
10. Todo elemento x mayor que 0 tiene un *negativo* $-x$ tal que $x+(-x) = 0$.
11. $(-x)y = -(xy)$.
12. $x = -(-x)$.

[2]Aunque Peirce no lo indica, de los axiomas se deriva con facilidad que cada elemento tiene sucesor inmediato.

Los números naturales como ordinales y cardinales. Una relación *de correspondencia simple* es una función inyectiva. Una *cuenta* de un conjunto S es una función inyectiva c de S en N tal que si $n < c(s)$ para algún elemento $s \in S$ entonces existe $s' \in S$ tal que $n = c(s')$ — en otras palabras, es una función biyectiva de S en un segmento inicial de los números naturales. El *número* de la cuenta es el elemento máximo de su imagen $c(S)$, cuando existe.

Un conjunto tiene muchas cuentas que, en principio, podrían tener distintos números. Peirce demuestra que esto no sucede, mediante las afirmaciones siguientes[3] cuya prueba vale la pena mirar en detalle. En esencia se está probando que un sistema de cantidad simple, discreto y limitado está determinado de manera única por su cardinal.

Lema. *Si el número de alguna cuenta del segmento inicial de números naturales* $[1, x]$ *es* y *entonces el número de alguna cuenta de* $[1, y]$ *es* x.

Demostración. La definición de cuenta puede desglosarse como sigue.

1) Si $n \leq x$ entonces existe $c(n)$
2) Si $m \leq c(n)$ para algún $n \leq x$ entonces $m = c(n')$ para algún $n' \leq x$.
3) $y = c(n)$ para algún $n \leq x$.
4) Si $p < c(n)$ para algún $n \leq x$ entonces $p \neq y$.

No es difícil verificar que la función c_1, inversa de c, tiene las mismas cuatro propiedades y que, por tanto, es una cuenta. □

Teorema. *El número de cualquier cuenta del segmento inicial de números naturales* $[1, x]$ *es* x.

Demostración por inducción. Para $x = 1$, el enunciado se sigue de las definiciones. Supóngase —hipótesis de inducción— que el número de cualquier cuenta de $[1, n]$ es n. Si el número de alguna cuenta de $[1, n+1]$ es 1, por el lema el número de alguna cuenta de $[1, 1]$ es $n + 1$ lo cual contradice el caso $x = 1$ ya visto. Luego el número de cualquier cuenta de $[1, n + 1]$ es mayor que 1, sea $m + 1$ el número de alguna de estas cuentas. A partir de la correspondencia biyectiva entre $[1, n+1]$ y $[1, m+1]$ puede elaborarse una entre $[1, n]$ y $[1, m]$, de donde m es el número de alguna cuenta de $[1, n]$. Por hipótesis de inducción $m = n$, luego también $m + 1 = n + 1$. Así el número de cualquier cuenta de $[1, n + 1]$ es $n + 1$. □

[3] Aunque él no las enuncia ni las destaca como se acostumbra ahora.

En palabras de Peirce, el número de números menores o iguales que x es x. Este hecho tiene consecuencias profundas. En primer lugar, el número de cualquier cuenta de un conjunto es siempre el mismo y no depende de la cuenta. En segundo lugar, si un conjunto S tiene un número natural por cuenta entonces no está en correspondencia biyectiva con ningún subconjunto propio. Es decir, si S es finito (está en correspondencia con un segmento inicial propio de números naturales) entonces es Dedekind-finito (no es equipotente a ningún subconjunto propio)[4]. En los párrafos postreros de su artículo, Peirce expresa esta propiedad como sigue: Si todo S es un P y si los P son una agrupación finita con un número que no supera al de los S, entonces todo P es un S.

3. Problemas

En esta última sección se indican algunos problemas abiertos relacionados con el artículo *On the Logic of Number*.

1. Según Paul Shields [22] en los escritos de Charles S. Peirce —muchos de ellos aún inéditos— aparecen otras axiomatizaciones de la aritmética. Sería muy valioso rastrear todos los sistemas axiomáticos peirceanos para los números naturales y compararlos de alguna manera con el trabajo publicado en 1881.
2. Si bien la axiomatización de la aritmética es diferente en los trabajos de Peirce y de Peano, la definición de las operaciones y la prueba de sus propiedades es casi idéntica. Es inadmisible pensar que Peano haya tomado las ideas de Peirce —en ese caso con seguridad lo habría indicado en sus referencias— pero sí existe la posibilidad de que ambos se hayan inspirado en un mismo trabajo, quizás de uso corriente en la época.

   Peano menciona entre sus fuentes el texto de Grassmann [7], así que valdría la pena mirar qué contiene este libro sobre la definición de las operaciones aritméticas y sobre sus propiedades.
3. No es difícil probar, de manera formal, que las axiomatizaciones presentadas por Peirce y Peano son equivalentes [2, 21]. Sin embargo, desde un punto de vista conceptual puede argüirse que las presentaciones tienen diferencias intrínsecas: en un caso se trata de un conjunto con una relación binaria y en el otro de un conjunto con una endofunción y un elemento distinguido. ¿Cómo decidir si esta diferencia es esencial? Para empezar, es preciso ubicar el problema en un contexto diferente al de la lógica y la teoría de conjuntos clásicas.

[4]Más de 40 años después Tarski mostró que para la prueba del enunciado recíproco se requiere el axioma de elección.

Una metodología que ha dado excelentes resultados en problemas similares consiste en emplear el lenguaje de la teoría de categorías [1, 4, 11, 13, 14]. Basta expresar las dos construcciones en términos categóricos y luego recorrer el espectro de las categorías en busca de un contexto en el cual las estructuras no sean isomorfas. La traducción de los axiomas de Peano al lenguaje categórico fue realizada de manera magistral por William Lawvere [2, 12] y el resultado se conoce —y se emplea— con el nombre de *objeto números naturales* [4, 10, 14].

El problema abierto que se plantea consiste en traducir la axiomatización de Peirce al lenguaje de la teoría de categorías.

Bibliografía

[1] Julio C. Aponte y Carlos A. Céspedes, *Caracterización de Morfismos en algunas Categorías Algebraicas.* Tesis (matemáticos). Universidad del Tolima, Ibagué, 2000.

[2] Lina M. Bedoya, *Peano, Lawvere, Peirce: Tres axiomatizaciones de los números naturales.* Tesis (matemática). Universidad del Tolima, Ibagué, 2003.

[3] Richard Dedekind, *Was Sind und Was Sollen die Zahlen?* Vieweg, Braunschweig, 1888. Traducido al español: *¿Qué son y para qué sirven los Números?* Alianza Editorial, Madrid.

[4] Peter J. Freyd and Andre Scedrov, *Categories, Allegories.* North-Holland, Amsterdam, 1990.

[5] Mireya García, Jhon Fredy Gómez y Arnold Oostra, *Simetría y Lógica: La notación de Peirce para los 16 conectivos binarios.* Memorias del XII Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, 2001. Páginas 1–26.

[6] Mireya García y Jhon Fredy Gómez, *Notación de Peirce para los Conectivos Binarios.* Tesis (matemáticos). Universidad del Tolima, Ibagué, 2002.

[7] Hermann Grassmann, *Lehrbuch der Arithmetik für Höhere Lehranstalten.* Eslin, Berlin, 1861.

[8] Ivor Grattan-Guinness, *Peirce between Logic and Mathematics.* In: Nathan Houser, Don D. Roberts and James Van Evra (Eds.), *Studies in the Logic of Charles Sanders Peirce.* Indiana University Press, Bloomington and Indianapolis, 1997. Pages 23–42.

[9] Nathan Houser, *Introduction: Peirce as logician.* In: Nathan Houser, Don D. Roberts and James Van Evra (Eds.), *Studies in the Logic of Charles Sanders Peirce.* Indiana University Press, Bloomington and Indianapolis (1997). Pages 1–22.

[10] F. William Lawvere, *An Elementary Theory of the Category of Sets.* Proc. Nat. Acad. Sci. **52** (1964) 1506–1511.

[11] F. William Lawvere and Stephen H. Schanuel, *Conceptual Mathematics. A first introduction to categories.* Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[12] Saunders Mac Lane and Garrett Birkhoff, *Algebra.* Macmillan, London, 1970.

[13] Saunders Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*. Graduate Texts in Mathematics 5. Springer-Verlag, New York, 1971.

[14] Saunders Mac Lane and Ieke Moerdijk, *Sheaves in Geometry and Logic. A first introduction to topos theory.* Universitext. Springer-Verlag, New York, 1992.

[15] José M. Muñoz, *Introducción a la Teoría de Conjuntos*. Cuarta Edición. Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias, Bogotá, 2002.

[16] Arnold Oostra, *Acercamiento lógico a Peirce*. Boletín de Matemáticas - Nueva Serie **VII** (2000) 60–77.

[17] Arnold Oostra, *El concepto de número natural según Charles S. Peirce*. Memorias del XIII Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones y I Encuentro de Aritmética, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, 2002. Por aparecer.

[18] Giuseppe Peano, *Arithmetices Principia Nova Methodo Exposita*. Bocca, Turin, 1889. Translated into english: van Heijenoort, *The Principles of Arithmetic, presented by a new method*.

[19] Benjamin Peirce, *Linear Associative Algebra*. Private edition, Washington D.C., 1870. Reprinted in: American Journal of Mathematics **4** (1881) 97 – 229.

[20] Charles S. Peirce, *On the Logic of Number*. American Journal of Mathematics **4** (1881) 85–95. Reprinted in: *Collected Papers of Charles Sanders Peirce*, Volume **3**. Harvard University Press, Cambridge, 1932. §252–288. Also reprinted in: *Writings of Charles S. Peirce: A Chronological Edition*, Volume **4**. Indiana University Press, Bloomington and Indianapolis, 1989. Pages 299–309.

[21] Paul Shields, *Charles S. Peirce on the Logic of Number*. Ph. D. Dissertation. Fordham University, New York, 1981.

[22] Paul Shields, *Peirce's axiomatization of arithmetic*. In: Nathan Houser, Don D. Roberts and James Van Evra (Eds.), *Studies in the Logic of Charles Sanders Peirce*. Indiana University Press, Bloomington and Indianapolis, 1997. Pages 43 – 52.

[23] Fernando Zalamea, *Una jabalina lanzada hacia el futuro: Anticipos y aportes de C. S. Peirce a la lógica matemática del siglo XX*. Mathesis **9** (1993) 391–404.

[24] Fernando Zalamea, *Lógica Topológica: Una introducción a los gráficos existenciales de Peirce*. XIV Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, 1997.

[25] Fernando Zalamea, *Ariel y Arisbe. Evolución y evaluación del concepto de América Latina en el siglo XX*. Convenio Andrés Bello, Bogotá, 2000.

[26] Fernando Zalamea, *El Continuo Peirceano. Aspectos globales y locales de genericidad, reflexividad y modalidad: Una visión del continuo y la arquitectónica pragmática peirceana desde la lógica matemática del siglo XX*. Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias, Bogotá, 2001.