Boletín de Matemáticas
Nueva Serie, Volumen X No. 1 (2003), pp. 1–12

SOBRE LA LÓGICA DEL NÚMERO (*)

CHARLES S. PEIRCE (**)

Nadie puede poner en duda las propiedades elementales concernientes al número: las que no son manifiestamente verdaderas a primera vista se verifican mediante las demostraciones usuales. Pero aunque vemos que *son* verdaderas, no vemos tan fácilmente con precisión *por qué* son verdaderas; tanto es así que un lógico inglés de renombre ha abrigado la duda de si serían verdaderas en todo el universo. El objetivo de este artículo es mostrar que ellas son consecuencias estrictamente silogísticas de unas pocas proposiciones primarias. La cuestión acerca del origen lógico de estas últimas, que aquí considero como definiciones, requeriría una discusión aparte. En mis pruebas me veo obligado a emplear la lógica de relativos, en la cual las formas de inferencia no son, en un sentido estricto, reducibles a silogismos ordinarios. Sin embargo ellas son de la misma naturaleza, siendo simplemente silogismos en los cuales los objetos referidos son parejas o triplas. Su validez no depende de otras condiciones que aquellas de las cuales depende la validez del silogismo simple, excepto la suposición de la existencia de singularidades, que no es requerida por el silogismo.

Confío que la selección de proposiciones probadas será suficiente para mostrar que todas las demás podrían ser probadas con métodos similares.

Sea r cualquier término relativo, de manera que de una cosa puede decirse que es r de otra y que la última es r-afectada por la primera. Si en cierto sistema

(*) Título original: *On the Logic of Number*, American Journal of Mathematics 4 (1881) p. 85–95. Reimpreso en *Collected Papers of Charles Sanders Peirce*, volumen 3 (Harvard University Press, Cambridge, 1932), §252–288. También reimpreso en *Writings of Charles S. Peirce: A Chronological Edition*, volumen 4 (Indiana University Press, Bloomington and Indianapolis, 1989), p. 299–309.

(**) Traducción de Lina María Bedoya, estudiante de Matemáticas de la Universidad del Tolima.
e-mail: limathematics@hotmail.com.

de objetos, todo lo que sea r de un r de cualquier cosa es, él mismo, r de esa cosa, entonces se dice que r es un relativo transitivo en ese sistema. (Relativos como “amantes de cualquier cosa amada por” son relativos transitivos.) En un sistema en el cual r es transitivo, supóngase que los q de cualquier cosa incluyen esa misma cosa y así mismo cualquier r de ella que no esté r-afectada por ella. Entonces q puede llamarse un relativo fundamental de cantidad, siendo sus propiedades: primera, que es transitivo; segunda, que cualquier cosa en el sistema es q de sí mismo y tercera, que nada es a la vez q de y q-afectada por cualquier cosa excepto ella misma. Los objetos de un sistema con un relativo fundamental de cantidad se llaman cantidades y el sistema se llama un sistema de cantidad.

Un sistema en el cual ciertas cantidades pueden ser q de o q-afectadas por la misma cantidad sin ser la una q de o q-afectada por la otra, se llama múltiple;[1] un sistema en el cual de cada dos cantidades alguna es q de la otra se denomina simple.

Cantidad Simple.

En un sistema simple toda cantidad es o bien “tan grande como” o bien “tan pequeña como” cualquier otra; cualquier cosa que sea tan grande como algo que a su vez es tan grande como una tercera cosa, es esta misma tan grande como esa tercera, y ninguna cantidad es a la vez tan grande como y tan pequeña como alguna otra, excepto sí misma.

Un sistema de cantidad simple es continuo, discreto o mixto. Un sistema continuo es uno en el que cualquier cantidad mayor que otra, es también mayor que alguna cantidad intermedia, mayor que la otra. Un sistema discreto es uno en el que cualquier cantidad mayor que otra es el sucesor inmediato de alguna cantidad (esto es, mayor que ésta sin ser mayor que ninguna otra mayor que ella). Un sistema mixto es uno en el cual algunas cantidades mayores que otras son sucesoras inmediatas, mientras algunas son continuamente mayores que otras cantidades.

Cantidad Discreta.

Un sistema simple de cantidad discreta es limitado, semi-limitado o ilimitado. Un sistema limitado es aquel que tiene una cantidad máxima absoluta y una mínima absoluta; un sistema semi-limitado tiene una pero no la otra (generalmente se considera la mínima); un sistema ilimitado no tiene ninguna.

[1] Por ejemplo en el álgebra ordinaria de imaginarios, dos cantidades pueden resultar ambas de la adición de cantidades de la forma $a^2 + b^2 i$ a la misma cantidad, sin estar ninguna en esta relación con la otra. *[NOTA DEL AUTOR.]*

Un sistema simple, discreto, ilimitado en la dirección de crecimiento o decrecimiento, es en esta dirección infinito o super-infinito. Un sistema infinito es aquel en el que cualquier cantidad mayor que x puede ser alcanzada de x por pasos sucesivos hacia el sucesor (o antecesor) inmediato. En otras palabras, un sistema infinito, discreto, simple es uno en el que, si el sucesor inmediato de una cantidad alcanzada también es alcanzado, entonces cualquier cantidad mayor que una alcanzada es alcanzada; y por la clase de cantidades alcanzadas se entiende cualquier clase que satisfaga estas condiciones. Así, podríamos decir que una clase infinita es una en la cual si es cierto que toda cantidad sucesora inmediata de una cantidad de una clase dada pertenece también a esa clase, entonces es cierto que toda cantidad mayor que una cantidad de esa clase pertenece a esa clase. Si la clase de números en cuestión está constituida por todos los números en los que una cierta proposición es verdadera, entonces un sistema infinito puede ser definido como uno en el que del hecho de que para cualquier proposición, si es verdadera para algún número, es verdadera para el sucesor inmediato, puede inferirse que si esta proposición es cierta para algún número, es cierta para todo número mayor.

En un sistema super-infinito esta proposición, en sus diversas formas, es falsa.

Cantidad Semi-infinita.

Ahora procedemos a estudiar las proposiciones fundamentales de la cantidad semi-infinita, discreta y simple, que es el número ordinario.

Definiciones.

El número mínimo se llama uno.

Por $x+y$ se entiende, en el caso $x=1$, el sucesor inmediato de y; y en los otros casos, el sucesor inmediato de $x'+y$, donde x' es el antecesor inmediato de x.

Por $x \times y$ se entiende, en el caso $x=1$, el número y; y en los otros casos $y+x'y$, donde x' es el antecesor inmediato de x.

Puede notarse que los símbolos $+$ y $\times$ son relativos ternarios, sus dos correlatos puestos uno antes y el otro después del símbolo mismo.

Teoremas.

En todos los casos la prueba consistirá en mostrar, 1º, que la proposición es verdadera para el número uno, y 2º, que si es verdadera para el número n, es verdadera para el número $1+n$, sucesor inmediato de n. Las diferentes transformaciones de cada expresión se alinearán la una debajo de la otra en una columna, con las indicaciones de los principios de transformación en otra columna.

1. Por probar la ley asociativa de la adición,

$$(x+y)+z = x+(y+z)$$

para cualesquier números x, y y z.
Primero, esto es verdadero para $x = 1$; porque $(1+y)+z = 1+(y+z)$ por la definición de la adición, 2ª cláusula. Segundo, si es cierto para $x = n$, es cierto para $x = 1+n$; esto es, si $(n+y)+z = n+(y+z)$ entonces $((1+n)+y)+z = (1+n)+(y+z)$. Pues

$$\begin{array}{ll} ((1+n)+y)+z & \\ = (1+(n+y))+z & \text{por la definición de adición:} \\ = 1+((n+y)+z) & \text{por la definición de adición:} \\ = 1+(n+(y+z)) & \text{por hipótesis:} \\ = (1+n)+(y+z) & \text{por la definición de adición.} \end{array}$$

2. Por demostrar la ley conmutativa de la adición,

$$x+y = y+x$$

para cualesquier números x y y.
Primero, esto es cierto para $x = 1$ y $y = 1$, siendo en este caso una identidad explícita. Segundo, si es verdadero para $x = n$ y $y = 1$, es verdadero para $x = 1+n$ y $y = 1$, esto es, si $n+1 = 1+n$, entonces $(1+n)+1 = 1+(1+n)$. Porque

$$\begin{array}{rll} (1+n)+1 & = 1+(n+1) & \text{por la ley asociativa:} \\ & = 1+(1+n) & \text{por hipótesis.} \end{array}$$

Así hemos probado que, para todo número x, $x+1 = 1+x$, o que $x+y = y+x$ para $y = 1$. Ahora debe mostrarse que si esto es verdadero para $y = n$, es verdadero para $y = 1+n$; esto es, si $x+n = n+x$ entonces $x+(1+n) = (1+n)+x$. Ahora,

$$
\begin{aligned}
& x + (1 + n) & \\
&= (x + 1) + n && \text{por la ley asociativa:} \\
&= (1 + x) + n && \text{como se acaba de ver:} \\
&= 1 + (x + n) && \text{por la definición de adición:} \\
&= 1 + (n + x) && \text{por hipótesis:} \\
&= (1 + n) + x && \text{por la definición de adición.}
\end{aligned}
$$

Luego la prueba está completa.

3. Por demostrar la ley distributiva, primera cláusula.
La ley distributiva está compuesta de dos proposiciones:

$$
\begin{aligned}
&1^{\text{a}}, && (x + y)z = xz + yz \\
&2^{\text{a}}, && x(y + z) = xy + xz.
\end{aligned}
$$

Ahora intentaremos probar la primera de éstas. Primero, es cierta para $x = 1$. Pues

$$
\begin{aligned}
& (1 + y)z & \\
&= z + yz && \text{por la definición de multiplicación:} \\
&= 1z + yz && \text{por la definición de multiplicación.}
\end{aligned}
$$

Segundo, si es verdadera para $x = n$, es verdadera para $x = 1 + n$; esto es, si $(n + y)z = nz + yz$ entonces $((1 + n) + y)z = (1 + n)z + yz$. Porque

$$
\begin{aligned}
& ((1 + n) + y)z & \\
&= (1 + (n + y))z && \text{por la definición de adición:} \\
&= z + (n + y)z && \text{por la definición de multiplicación:} \\
&= z + (nz + yz) && \text{por hipótesis:} \\
&= (z + nz) + yz && \text{por la ley asociativa de la adición:} \\
&= (1 + n)z + yz && \text{por la definición de multiplicación.}
\end{aligned}
$$

4. Por probar la segunda proposición de la ley distributiva,

$$x(y + z) = xy + xz.$$

Primero, esto es verdadero para $x = 1$; porque

$$
\begin{aligned}
& 1(y+z) \\
&= y+z && \text{por la definición de multiplicación:} \\
&= 1y+1z && \text{por la definición de multiplicación.}
\end{aligned}
$$

Segundo, si es verdadero para $x = n$, es verdadero para $x = 1 + n$; esto es, si $n(y+z) = ny+nz$, entonces $(1+n)(y+z) = (1+n)y+(1+n)z$. Pues

$$
\begin{aligned}
& (1+n)(y+z) \\
&= (y+z)+n(y+z) && \text{por la definición de multiplicación:} \\
&= (y+z)+(ny+nz) && \text{por hipótesis:} \\
&= (y+ny)+(z+nz) && \text{por las leyes de la adición:} \\
&= (1+n)y+(1+n)z && \text{por la definición de multiplicación.}
\end{aligned}
$$

5. Por demostrar la ley asociativa de la multiplicación; esto es, que

$$(xy)z = x(yz)$$

para cualesquier números x, y y z.
Primero, esto es verdadero para $x = 1$, porque

$$
\begin{aligned}
& (1y)z \\
&= yz && \text{por la definición de multiplicación:} \\
&= 1 \cdot yz && \text{por la definición de multiplicación.}
\end{aligned}
$$

Segundo, si es verdadero para $x = n$, es verdadero para $x = 1 + n$; esto es, si $(ny)z = n(yz)$, entonces $((1 + n)y)z = (1 + n)(yz)$. Porque

$$
\begin{aligned}
& ((1+n)y)z \\
&= (y+ny)z && \text{por la definición de multiplicación:} \\
&= yz+(ny)z && \text{por la ley distributiva:} \\
&= yz+n(yz) && \text{por hipótesis:} \\
&= (1+n)(yz) && \text{por la definición de multiplicación.}
\end{aligned}
$$

6. Por probar la ley conmutativa de la multiplicación, que

$$xy = yx$$

para cualesquier números x y y.
En primer lugar, probamos que esto es verdadero para $y = 1$. Para tal fin, primero mostramos que es verdadero para $y = 1$, $x = 1$; y entonces que si es verdadero para $y = 1$, $x = n$, es verdadero para $y = 1$,

$x = 1 + n$. Para $y = 1$ y $x = 1$, esta es una identidad explícita. Ahora tenemos que mostrar que si $n1 = 1n$, entonces $(1 + n)1 = 1(1 + n)$. Ahora,

$(1 + n)1$	
$= 1 + n1$	por la definición de multiplicación:
$= 1 + 1n$	por hipótesis:
$= 1 + n$	por la definición de multiplicación:
$= 1(1 + n)$	por la definición de multiplicación.

Habiendo mostrado así que la ley conmutativa es verdadera para $y = 1$, procedemos a probar que si es verdadera para $y = n$, también lo es para $y = 1 + n$; esto es, si $xn = nx$, entonces $x(1 + n) = (1 + n)x$. Porque

$(1 + n)x$	
$= x + nx$	por la definición de multiplicación:
$= x + xn$	por hipótesis:
$= 1x + xn$	por la definición de multiplicación:
$= x1 + xn$	como ya probamos:
$= x(1 + n)$	por la ley distributiva.

Cantidad Discreta Simple Infinita en ambas direcciones.

Un sistema de números infinito en ambas direcciones no tiene mínimo, pero cierta cantidad se llama *uno*, y los números tan grandes como éste constituyen un sistema parcial de números semi-infinito, del cual éste es mínimo. Las definiciones de adición y multiplicación no requieren cambios, excepto que el *uno* debe entenderse en el nuevo sentido.

Para extender las pruebas de las leyes de la adición y la multiplicación a números ilimitados, es necesario mostrar que si son verdaderas para algún número $(n + 1)$ entonces también lo son para el antecesor inmediato n. Para este fin podemos usar las mismas transformaciones que en la segunda cláusula de la prueba anterior; sólo tenemos que hacer uso del siguiente lema.

Si $x+y = x+z$ entonces $y = z$, para cualesquier números x, y y z. Primero, esto es verdadero para el caso $x = 1$, porque entonces y y z son ambos antecesor inmediato del mismo número. Por consiguiente, ninguno es más pequeño que el otro, de otro modo no podría ser el antecesor inmediato de $1 + y = 1 + z$. Pero en un sistema simple, de dos números diferentes siempre alguno es más pequeño que el otro. De aquí que y y z son iguales. Segundo, si la proposición es verdadera para $x = n$, es verdadera para $x = 1+n$. Si $(1+n)+y = (1+n)+z$, entonces por la definición de adición $1 + (n + y) = 1 + (n + z)$; de donde se sigue que $n + y = n + z$, y, por hipótesis, que $y = z$. Tercero, si la proposición es verdadera para $x = 1 + n$, es verdadera para $x = n$. Pues si $n + y = n + z$, entonces $1 + n + y = 1 + n + z$, porque el sistema es simple. Así la certeza de la proposición ha sido probada para 1, para todo número mayor y para todo número menor, y por lo tanto es universalmente cierta.

Una inspección de las pruebas anteriores de las propiedades de la adición y la multiplicación para números semi-infinitos mostrará que estas realmente se extienden a números doblemente infinitos por medio de la proposición recién probada.

El antecesor inmediato de uno es llamado cero, 0. De manera simbólica, esta definición puede expresarse como $1 + 0 = 1$. Para probar que $x + 0 = x$, sea x' el antecesor inmediato de x. Entonces,

$$\begin{aligned} & x + 0 & \\ &= (1 + x') + 0 && \text{por la definición de } x'\text{:} \\ &= (1 + 0) + x' && \text{por las leyes de la adición:} \\ &= 1 + x' && \text{por la definición de cero:} \\ &= x && \text{por la definición de } x'. \end{aligned}$$

Por demostrar que $x0 = 0$.
Primero, en el caso $x = 1$, la proposición vale por la definición de multiplicación. Además, si es verdadera para $x = n$ también es verdadera para $x = 1 + n$. Porque

$$\begin{aligned} & (1 + n)0 & \\ &= 1 \cdot 0 + n \cdot 0 && \text{por la ley distributiva:} \\ &= 1 \cdot 0 + 0 && \text{por hipótesis:} \\ &= 1 \cdot 0 && \text{por el último teorema:} \\ &= 0 && \text{como antes.} \end{aligned}$$

Tercero, si la proposición es verdadera para $x = 1 + n$ entonces también es verdadera para $x = n$. Porque, cambiando el orden de las transformaciones,

$$1 \cdot 0 + 0 = 1 \cdot 0 = 0 = (1 + n)0 = 1 \cdot 0 + n \cdot 0.$$

Entonces por el lema mencionado, $n \cdot 0 = 0$, de suerte que la proposición está probada.

Un número que sumado a otro da cero, se llama el negativo del último. Por demostrar que todo número mayor que cero tiene un negativo. Primero, el antecesor inmediato de cero es el negativo de uno; pues por la definición de adición, uno más este número es cero. Segundo, si un número cualquiera n tiene un negativo, entonces el sucesor inmediato de n tiene como negativo el antecesor del negativo de n. Porque sea m el antecesor inmediato del negativo de n. Entonces $n + (1 + m) = 0$. Pero

$$\begin{aligned}
& n + (1 + m) & \\
&= (n + 1) + m \qquad & \text{por la ley asociativa de la adición:} \\
&= (1 + n) + m \qquad & \text{por la ley conmutativa de la adición.}
\end{aligned}$$

Así que $(1 + n) + m = 0$. *Q.E.D.*

Por consiguiente, todo número mayor que cero tiene un negativo y cero es el negativo de sí mismo.

Por probar $(-x)y = -(xy)$.
Tenemos

$$\begin{aligned}
0 &= x + (-x) & \text{por la definición de negativo:} \\
0 &= 0y = (x + (-x))y & \text{por la penúltima proposición:} \\
0 &= xy + (-x)y & \text{por la ley distributiva:} \\
-(xy) &= (-x)y & \text{por la definición de negativo.}
\end{aligned}$$

El negativo del negativo de un número es ese número. Porque $x + (-x) = 0$. De donde por la definición de negativo $x = -(-x)$.

Cantidad Discreta Simple Limitada.

Un término relativo c tal que todo c de cualquier cosa es el único c de esa cosa, y es un c sólo de esa cosa, se llama un relativo de correspondencia simple. En la notación de la lógica de relativos,

$$c\breve{c} \prec 1, \qquad \breve{c}c \prec 1.$$

Si todo objeto s de una clase está en una relación tal, siendo c-afectado por un número de un sistema discreto simple semi-infinito y si, además, todo número menor que un número c de un s es él mismo c de un s, entonces se dice que los números c de los s los cuentan, y el sistema de correspondencia se llama una cuenta. En notación lógica, poniendo g por tan grande como y n por un número entero positivo,

$$s \mathrel{-\!\!\!<} \breve{c}n \qquad \breve{g}cs \mathrel{-\!\!\!<} cs.$$

Si en una cuenta hay un número máximo, la cuenta se dice finita y ese número se llama el número de la cuenta. Si $[s]$ denota el número de una cuenta de los s, entonces

$$[s] \mathrel{-\!\!\!<} cs \qquad \bar{g}cs \mathrel{-\!\!\!<} \overline{[s]}.$$

El relativo "ser idéntico con" satisface la definición de un relativo de correspondencia simple, y la definición de una cuenta es satisfecha poniendo "ser idéntico con" por c, y "número entero positivo tan pequeño como x" por s. En este modo de contar, el número de números tan pequeños como x es x.

Supóngase que en una cuenta cualquiera se halla que el número de números tan pequeños como el número mínimo, uno, es n. Entonces, por la definición de cuenta, todo número tan pequeño como n cuenta un número tan pequeño como uno. Pero por la definición de uno sólo hay un número tan pequeño como uno. Por lo tanto, por la definición de correspondencia singular, ningún número diferente de uno cuenta a uno. Por lo tanto, por la definición de uno, ningún número diferente de uno cuenta un número tan pequeño como uno. Por lo tanto, por la definición de cuenta, el número de números tan pequeños como uno es, en toda cuenta, uno.

Si el número de números tan pequeños como x en alguna cuenta es y, entonces el número de números tan pequeños como y en alguna cuenta es x. Porque si la definición de correspondencia simple es satisfecha por el relativo c, igualmente es satisfecha por el relativo c-afectado.

Puesto que el número de números tan pequeños como x en alguna cuenta es y tenemos, siendo c algún relativo de correspondencia simple,

1º. Todo número tan pequeño como x es c-afectado por un número.
2º. Todo número tan pequeño como un número que es c de un número tan pequeño como x es él mismo c de un número tan pequeño como x.
3º. El número y es c de un número tan pequeño como x.
4º. Cualquier cosa que no es tan grande como un número que es c de un número tan pequeño como x no es y.

Ahora sea c_1 el converso de c. Entonces el converso de c_1 es c; de donde, puesto que c satisface la definición de un relativo de correspondencia simple, lo mismo hace c_1. Por la 3ª proposición anterior, todo número tan pequeño como y es tan pequeño como un número que es c de un número tan pequeño como x. De donde, por la 2ª proposición, todo número tan pequeño como y es c de un número tan pequeño como x; y de esto sigue que todo número tan pequeño como y es c_1-afectado por un número. Se sigue además que todo número c_1

de un número tan pequeño como y es c_1 de alguna cosa c_1-afectada por (esto es, siendo c_1 un relativo de correspondencia simple, es idéntico con) algún número tan pequeño como x. También, siendo "tan pequeño como" un relativo transitivo, todo número tan pequeño como un número c_1 [2] de un número tan pequeño como y es tan pequeño como x. Ahora por la 4ª proposición y es tan grande como cualquier número que es c de un número tan pequeño como x, de modo que lo que no es tan pequeño como y no es c de un número tan pequeño como x; de donde cualquier número que es c-afectado por un número no tan pequeño como y no es un número tan pequeño como x. Pero por la 2ª proposición todo número tan pequeño como x no c-afectado por un número no tan pequeño como y es c-afectado por un número tan pequeño como y. Por lo tanto, todo número tan pequeño como x es c-afectado por un número tan pequeño como y. Por tanto, todo número tan pequeño como un número c_1 de un número tan pequeño como y es c_1 de un número tan pequeño como y. Más aún, puesto que hemos mostrado que todo número tan pequeño como x es c_1 de un número tan pequeño como y, lo mismo es cierto para x mismo. Más aún, puesto que hemos visto que cualquier cosa que sea c_1 de un número tan pequeño como y es tan pequeño como x, se sigue que cualquier cosa que no es tan grande como un número c_1 de un número tan pequeño como y no es tan grande como un número tan pequeño como x; esto es (siendo "tan grande como" un relativo transitivo), no es tan grande como x, y consecuentemente no es x. Ahora hemos mostrado —

1º. que todo número tan pequeño como y es c_1-afectado por un número;
2º. que todo número tan pequeño como un número que es c_1 de un número tan pequeño como y es él mismo c_1 de un número tan pequeño como y;
3º. que el número x es c_1 de un número tan pequeño como y; y
4º. que cualquier cosa que no es tan grande como un número que es c_1 de un número tan pequeño como y no es x.

Estas cuatro proposiciones tomadas juntas satisfacen la definición del número de números tan pequeños como y que cuentan hasta x.

Por consiguiente, puesto que el número de números tan pequeños como uno no puede ser mayor que uno en cuenta alguna, se sigue que el número de números tan pequeños como alguno mayor que uno no puede ser uno en cuenta alguna.

Supóngase que hay una cuenta en la cual se ha hallado que el número de números tan pequeños como $1 + m$ es $1 + n$, puesto que acabamos de ver que no puede ser 1. En esta cuenta, sea m' el número que es c de $1 + n$, y n' el que es c-afectado por $1 + m$. Consideremos ahora un relativo, e, que difiere

[2] Aunque en las ediciones en *Collected Papers* y en *Writings* aquí dice c, es claro que debe ser c_1. *[NOTA DE TRADUCCIÓN.]*

de c solamente en excluir la relación de m' a $1 + n$ así como la relación de $1 + m$ a n' y en incluir la relación de m' a n'. Entonces e será un relativo de correspondencia singular; porque c lo es y ninguna exclusión de relaciones de una correspondencia singular afecta este carácter, mientras la inclusión de la relación de m' a n' deja a m' como el único e de n' y un e sólo de n'. Más aún, todo número tan pequeño como m es e de un número, puesto que todo número excepto $1 + m$ que es c de algo es e de alguna cosa y todo número excepto $1+m$ que es tan pequeño como $1+m$ es tan pequeño como m. También, todo número tan pequeño como un número e-afectado por un número es e-afectado él mismo por un número; porque todo número c-afectado es e-afectado excepto $1+m$, y este es mayor que todo número e-afectado. Se sigue que e es la base de un modo de contar en el cual los números tan pequeños como m cuentan hasta n. De esta manera hemos mostrado que si de alguna forma $1+m$ cuenta hasta $1+n$, entonces en alguna manera m cuenta hasta n. Pero ya hemos visto que para $x = 1$ el número de números tan pequeños como x no puede en manera alguna contar hasta otro distinto x. De donde se sigue que lo mismo es cierto cualquiera sea el valor de x.

Si todo S es un P y si los P son una agrupación finita que cuenta hasta un número tan pequeño como el número de los S, entonces todo P es un S. Porque si, contando los P, empezamos con los S (que son una parte de ellos), y habiendo contado todos los S llegamos al número n, no quedarán ni P ni S. Pues si hubiera alguno, el número de los P contaría hasta más que n. De esto deducimos la validez del siguiente modo de inferencia:

Todo Texano mata un Texano,
Nadie es muerto por más de una persona,
Por tanto, todo Texano es muerto por un Texano,

suponiendo que los Texanos son una agrupación finita. Porque por la primera premisa, todo Texano muerto por un Texano es un Texano asesino de un Texano. Por la segunda premisa, los Texanos muertos por Texanos son tantos como los Texanos asesinos de Texanos. De donde concluimos que todo Texano asesino de un Texano es un Texano muerto por un Texano, o, por la primera premisa, todo Texano es muerto por un Texano. Este modo de razonamiento es frecuente en la teoría de números.

NOTA.— Se puede observar que cuando razonamos que cierta proposición, si es falsa para algún número, es falsa para algún número más pequeño, y puesto que ningún número (en un sistema semi-limitado) es más pequeño que todo número, la proposición debe ser verdadera, entonces nuestro razonamiento es una simple transformación lógica del razonamiento que una proposición verdadera para n, es verdadera para $1+n$, y que es verdadera para 1. *[NOTA DEL AUTOR.]*