Boletín de Matemáticas
Nueva Serie, Volumen XV No. 1 (2008), pp. 13–35

COMPORTAMIENTO FUNTORIAL DE DOS CONOCIDOS PROCESOS DE COMPACTACIÓN

LORENZO ACOSTA (*)
CARLOS A. GIRALDO (**)

Resumen. Se estudia el proceso de compactación de Stone-Čech que proporciona un funtor de la categoría de los espacios de Tychonoff en la categoría de los espacios T_2-compactos con el propósito de extenderlo a la categoría de los espacios topológicos y demostrar que se conserva la propiedad universal que lo caracteriza. Para la compactación de Alexandroff se describen varias formas en las que este mecanismo se puede considerar un funtor, aplicándolo a subcategorías adecuadas de la categoría de los espacios topológicos.

Palabras claves. Compactación, funtor, subcategoría, función, adjunción, coproducto.

2000 Mathematics Subject Classification: 54D35, 18A05

(*) Lorenzo Acosta, Profesor Asociado, Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia. E-mail: lmacostag@unal.edu.co

(**) Este artículo es derivado del trabajo de grado realizado por el segundo autor para optar al título de Matemático en la Universidad Nacional de Colombia.

Abstract. The Stone-Čech compactification process, that provides a functor from the category of Tychonoff spaces into the category of T_2 compact spaces, is studied with the purpose of extending it to the category of topological spaces and proving that the universal property that characterizes it, is preserved . Several forms in which the Alexandroff compactification can be considered as a functor, when applied to suitable subcategories of the category of topological spaces are described.

Key words and phrases. Compactification, functor, subcategory, function, adjunction, coproduct.

1. Introducción

Entre los diferentes procesos de compactación de espacios topológicos los más conocidos son el de Stone-Čech para espacios de Tychonoff y el de Alexandroff para espacios de Hausdorff localmente compactos. La compactación de Stone-Čech está caracterizada por una propiedad universal que permite extender de manera única cualquier función continua con valores en un espacio de Hausdorff compacto, mientras que la de Alexandroff permite obtener la única compactación de Hausdorff por un punto para un espacio de Hausdorff localmente compacto y no compacto. Estas dos construcciones se pueden extender a espacios topológicos arbitrarios y producen siempre espacios compactos, aunque éstos no sean, en general, compactaciones del espacio original.

El objetivo de este trabajo es estudiar el comportamiento funtorial de estos dos mecanismos mediante una adecuada definición en los morfismos. En el caso de la construcción de Stone-Čech es bien conocido que se produce un funtor de la categoría de los espacios de Tychonoff en la categoría de los espacios de Hausdorff compactos, que resulta ser adjunto a izquierda del funtor inclusión. Pero es poco conocido el hecho que éste es en realidad un funtor definido en la categoría de los espacios topológicos (arbitrarios) y que también es adjunto a izquierda de la inclusión. Dedicaremos la Sección 2 a la descripción de la construcción de Stone-Čech y sus propiedades funtoriales.

Si se usa el mecanismo de Alexandroff y se trata de extender a las funciones continuas entre espacios topológicos, nos encontramos con la dificultad de que la única definición "natural" no produce en general funciones continuas. Es necesario entonces restringir el mecanismo a sub-categorías adecuadas de la categoría de los espacios topológicos. En este proceso encontramos varias formas de considerar el mecanismo de Alexandroff como un funtor que, a diferencia del funtor de Stone-Čech, no admite adjunto. Los resultados obtenidos para esta construcción los consignamos en la Sección 3.

Es importante anotar que no hemos encontrado en la literatura mención alguna del comportamiento funtorial de este mecanismo.

2. EL FUNTOR DE STONE-ČECH

En 1937 Stone [16] y Čech [7] introdujeron independientemente, una forma de compactar un espacio topológico T_0 y completamente regular (o espacio de Tychonoff). Aunque en esa época no se había desarrollado la teoría de categorías, los dos presentaron propiedades fundamentales de esta construcción, que permite considerarla como un funtor adjunto a izquierda. Más tarde, en 1948 [17], el mismo Stone probó que estas propiedades funtoriales se mantenían al extender el mecanismo a espacios topológicos arbitrarios, resultado que no ha sido recogido en los textos estándar de topología general.

En esta sección presentamos una descripción de la construcción de Stone-Čech y estudiamos sus propiedades funtoriales.

2.1. Construcción de Stone-Čech.

Describimos a continuación un mecanismo para producir espacios compactos y de Hausdorff a partir de espacios topológicos arbitrarios; estas construcciones son tomadas de [8], [9] y [18].

Designaremos por I al intervalo $[0,1]$ con la topología usual, $C(X,I)$ será el conjunto de las funciones continuas del espacio topológico X en I y I^S el espacio topológico de las funciones de S en I, el cual se identifica con el producto $\prod\limits_{s\in S} I_s$ donde $I_s = I$ para todo $s \in S$.

Para cada espacio topológico X definimos la siguiente función:

$$\varphi_X : X \to I^{C(X,I)} : \quad x \longmapsto (f(x))_{f\in C(X,I)}$$

Si π_g es la g-ésima proyección de $\prod\limits_{f\in C(X,I)} I_f$ en $I_g = I$ y $x \in X$, tenemos que:

$$(\pi_g \circ \varphi_X)(x) = \pi_g(\varphi_X(x)) = \pi_g\left((f(x))_{f\epsilon C(X,I)}\right) = g(x).$$

es decir, $\pi_g \circ \varphi_X = g$ para toda $g\epsilon C(X,I)$. Por lo tanto $\pi_g \circ \varphi_X$ es continua para cada función de proyección, lo cual implica la continuidad de φ_X.

Si tomamos la clausura de $\varphi_X(X)$ tenemos un subespacio compacto de $I^{C(X,I)}$. De esta forma a cada espacio topológico X se le asigna un espacio topológico compacto y de Hausdorff $\overline{\varphi_X(X)}$, que denotaremos por $\beta(X)$:

$$X \xrightarrow{\varphi_X} \varphi_X(X) \dashrightarrow \overline{\varphi_X(X)} = \beta(X).$$

Si $f : X \longrightarrow Y$ es una aplicación continua entre espacios topológicos, se definen las funciones $\widetilde{f}$ y $\widehat{f}$ como sigue:

$$C(Y,I) \xrightarrow{\widetilde{f}} C(X,I)$$
$$g \mapsto g \circ f$$

$$I^{C(X,I)} \xrightarrow{\widehat{f}} I^{C(Y,I)}$$
$$\alpha \mapsto \alpha \circ \widetilde{f}$$

Dada $\alpha \in I^{C(X,I)}$, tenemos que:

$$\left(\pi_g \circ \widehat{f}\right)(\alpha) = \pi_g\left(\widehat{f}(\alpha)\right) = \pi_g\left(\alpha \circ \widetilde{f}\right) = \left(\alpha \circ \widetilde{f}\right)(g) =$$

$$\alpha\left(\widetilde{f}(g)\right) = \alpha(g \circ f) = \pi_{g\circ f}(\alpha).$$

Así, $\pi_g \circ \widehat{f} = \pi_{g\circ f}$ para toda $g\epsilon C(Y,I)$, luego $\pi_g \circ \widehat{f}$ es continua para cada función de proyección y por lo tanto $\widehat{f}$ es continua.

Observemos que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi_X} & I^{C(X,I)} \\ f\downarrow & & \downarrow \widehat{f} \\ Y & \xrightarrow{\varphi_Y} & I^{C(Y,I)} \end{array}$$

En efecto, para cada $x \in X$ y cada $g \in C\left(Y, I\right)$ se tiene

$$\pi_g\left(\widehat{f}\circ\varphi_X\right)(x) = \left(\pi_g\circ\widehat{f}\right)\left(\varphi_X\left(x\right)\right) = \pi_{g\circ f}\left(\varphi_X\left(x\right)\right) = g\left(f\left(x\right)\right) = \\ \pi_g\left(\varphi_Y\left(f\left(x\right)\right)\right) = \pi_g\left(\varphi_Y\circ f\right)(x).$$

En virtud de este hecho, $\widehat{f}\left(\varphi_X\left(X\right)\right) = \varphi_Y\left(f\left(X\right)\right) \subseteq \varphi_Y\left(Y\right) \subseteq \overline{\varphi_Y\left(Y\right)} = \beta\left(Y\right)$. Como $\widehat{f}$ es continua

$$\widehat{f}\left(\beta\left(X\right)\right) = \widehat{f}\left(\overline{\varphi_X\left(X\right)}\right) \subseteq \overline{\widehat{f}\left(\varphi_X\left(X\right)\right)} \subseteq \overline{\varphi_Y\left(Y\right)} = \beta\left(Y\right),$$

es decir, $\widehat{f}\left(\beta\left(X\right)\right) \subseteq \beta\left(Y\right)$. Por lo tanto, $\widehat{f}\downharpoonleft_{\beta(X)}$ es una función continua de $\beta\left(X\right)$ en $\beta\left(Y\right)$, la cual denotaremos por $\beta\left(f\right)$.

Proposición 1. *Si $f : X \rightarrow Y$ es una aplicación continua entre espacios topológicos entonces $\beta\left(f\right) : \beta\left(X\right) \rightarrow \beta\left(Y\right)$ es la única aplicación continua que hace el siguiente diagrama conmutativo:*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi_X} & \beta\left(X\right) \\ f\downarrow & & \downarrow \beta\left(f\right) \\ Y & \xrightarrow{\varphi_Y} & \beta\left(Y\right) \end{array}$$

Demostración. Si existe $w : \beta\left(X\right) \longrightarrow \beta\left(Y\right)$ continua tal que $w\circ\varphi_X = \varphi_Y\circ f$, entonces $w\circ\varphi_X\left(X\right) = \beta\left(f\right)\circ\varphi_X\left(X\right)$. Como $\varphi_X\left(X\right)$ es denso en $\beta\left(X\right)$ y $\beta\left(Y\right)$ es T_2, se tiene que $w = \beta\left(f\right)$, por lo tanto, $\beta\left(f\right)$ es la única aplicación continua de $\beta\left(X\right)$ en $\beta\left(Y\right)$ que hace el diagrama conmutativo.

El operador β puede alterar significativamente el espacio original como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1. Sea X un espacio topológico para el que las únicas funciones continuas de X en I son las funciones constantes (cualquier conjunto con la topología grosera, el espacio de Sierpinski, cualquier conjunto con la topología del punto incluido, etc.). Si cada función f la indexamos por el número del intervalo $[0,1]$ que corresponde a la imagen de X por f, es decir, $C(X,I) = \{f_i\}_{i\in I}$ donde $f_i\,(X) = \{i\}$, tenemos que:

$$\varphi_X\,(x) = (f_i\,(x))_{i\in I} = (i)_{i\in I}$$

es decir, $\beta\,(X)$ es un subconjunto unipuntual del cubo $I^{C(X,I)}$.

2.2. Compactación de espacios de Tychonoff.

El "mal comportamiento" de β con algunos espacios topológicos como el ilustrado en el Ejemplo 1 desaparece al considerar espacios de Tychonoff; para estos espacios β tiene propiedades muy buenas. Antes de verificar algunas de ellas iniciamos la sección precisando la definición de compactación de un espacio topológico [13].

Definición 1. *Se llama compactación de X a todo par (X', f), donde:*

1. *X' es un espacio topológico compacto.*
2. *f es un homemomorfismo de X en $f\,(X)$.*
3. *$\overline{f\,(X)} = X'$.*

Si aplicamos β a un espacio de Tychonoff X, $\beta\,(X)$ corresponderá a una compactación de Hausdorff de X. Este resultado se demostrará haciendo uso de las siguientes proposiciones:

Proposición 2. *Si X es homeomorfo a $\varphi_X\,(X)$ entonces X es de Tychonoff.*

Demostración. Como $\varphi_X\,(X)$ es un subespacio de $I^{C(X,I)}$, $\varphi_X\,(X)$ es T_0 y completamente regular, ya que estas son propiedades hereditarias; luego por el homeomorfismo tenemos que X es de Tychonoff.

Proposición 3. *Si X es completamente regular entonces $\varphi_X : X \to \varphi(X)$ es abierta.*

Demostración. Veamos que la colección $\{V_g\}_{g\in C(X,I)}$ es una base para la topología sobre X donde $V_g = g^{-1}(0,1]$. Como $(0,1]$ es un subconjunto abierto de $[0,1]$ y g es una función continua de X en $[0,1]$, $g^{-1}(0,1]$ es abierto en X. Dado que X es completamente regular, para $x \in X$ y U un subconjunto abierto de X que contenga a x, existe $g_x \in C(X,I)$ tal que $g_x(x) = 1$ y $g_x(U^c) = \{0\}$; por lo tanto $x \in V_{g_x} \subseteq U$, es decir, la colección de los V_g es una base para la topología sobre X. Para $g \in C(X,I)$, si $A_g = \left\{(\alpha_f)_{f\in C(X,I)} : \alpha_g = \alpha(g) \neq 0\right\}$ entonces $A_g = (0,1] \times \prod\limits_{\substack{f\in C(X,I)\\ f\neq g}} I_f$, es decir, A_g es abierto en $I^{C(X,I)}$; por lo tanto

$$\varphi_X(V_g) = \left\{(f(x))_{f\in C(X,I)} : g(x) \neq 0\right\} = (\varphi_X(X) \cap A_g)$$

es abierto en $\varphi_X(X)$, lo cual comprueba que $\varphi_X : X \to \varphi(X)$ es abierta.

Proposición 4. *Si X es T_0 y completamente regular entonces φ_X es inyectiva.*

Demostración. Para x, y en X con $x \neq y$, existe U subconjunto abierto de X tal que $x \in U$ y $y \notin U$ o $x \notin U$ y $y \in U$, puesto que X es T_0. Sin pérdida de generalidad supongamos que $x \in U$ y $y \notin U$. Como X es completamente regular existe $f \in C(X,I)$ para la cual $f(x) = 1$ y $f(U^c) = \{0\}$. Si tomamos la f-ésima proyección en $I^{C(X,I)}$ tenemos que:

$$\pi_f(\varphi_X(x)) = \pi_f\left((g(x))_{g\in C(X,I)}\right) = f(x) = 1 \neq 0 = f(y) = \\ \pi_f\left((g(y))_{g\in C(X,I)}\right) = \pi_f(\varphi_X(x)),$$

es decir, $\varphi_X(x)$ y $\varphi_X(y)$ se diferencian en la f-ésima componente, luego $\varphi_X(x) \neq \varphi_X(y)$, con lo cual se concluye que φ_X es inyectiva.

Resumiendo tenemos el siguiente teorema.

Teorema 1. *X es homeomorfo a $\varphi_X(X)$ si y sólo si X es T_0 y completamente regular.*

El siguiente teorema nos muestra el buen comportamiento de la construcción con respecto a las funciones continuas.

Teorema 2. *Si X es de Tychonoff, para todo espacio topológico Y de Hausdorff compacto y toda aplicación continua $f : X \to Y$ existe una aplicación continua $\bar{f} : \beta(X) \to Y$ tal que $\bar{f} \circ \varphi_X = f$.*

Demostración. Puesto que Y es T_2-compacto, φ_Y es un homeomorfismo de Y en $\beta(Y)$ y como $\beta(f) \circ \varphi_X = \varphi_Y \circ f$, tenemos que $\varphi_Y^{-1} \circ \beta(f) \circ \varphi_X = f$, es

decir, $\bar{f} = \varphi_Y^{-1} \circ \beta(f)$.

Del Teorema 1 se concluye que $\beta(X)$ es una compactación de X, siempre que X sea de Tychonoff. Esta compactación es la que conocemos como compactación de Stone-Čech del espacio topológico X.

Las siguientes proposiciones nos permiten determinar cuándo una compactación de un espacio topológico es topológicamente equivalente a la compactación de Stone-Čech de dicho espacio. Sus demostraciones las encontramos en [13].

Proposición 5. *Sea X un espacio de Tychonoff. Si (X', f) es una compactación de Hausdorff de X tal que para todo espacio Y T_2-compacto y toda aplicación continua $g : X \to Y$ existe g' continua de X' en Y tal que $g' \circ f = g$, entonces (X', f) es topológicamente equivalente a $(\beta(X), \varphi_X)$.*

Proposición 6. *Si X es un espacio topológico normal, T_1 y (X', α) es una compactación de Hausdorff de X, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *X' es topológicamente equivalente a la compactación de Stone-Čech de X.*
2. *Para todo par de cerrados disjuntos A, B de X, se verifica que $\overline{\alpha(A)} \cap \overline{\alpha(B)} = \varnothing$.*

2.3. Comportamiento funtorial de β.

En esta sección mostramos que β puede verse como un funtor de la categoría de los espacios topológicos en la categoría de los espacios de Hausdorff compactos y que además tiene adjunto a derecha.

Para los espacios topológicos X, Y y Z consideremos los siguientes diagramas:

$$\begin{array}{lc} X & C(Z,I) \xrightarrow{\widetilde{g}} C(Y,I) \\ \downarrow f & \widetilde{f} \circ \widetilde{g} \searrow \ \downarrow \widetilde{f} \\ Y & C(X,I) \\ \downarrow g & \\ Z & \end{array}$$

Dado $\alpha \in C(Z,I)$, $\widetilde{g \circ f}\,(\alpha) = \alpha \circ g \circ f = \widetilde{f}\,(\alpha \circ g) = \widetilde{f}\left(\widetilde{g}\,(\alpha)\right) = \widetilde{f} \circ \widetilde{g}\,(\alpha)$, es decir, $\widetilde{g \circ f} = \widetilde{f} \circ \widetilde{g}$.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi_X} & \beta(X) \\ 1_X \downarrow & 1_{\beta(X)} \downarrow\downarrow \beta(1_X) & \\ X & \xrightarrow{\varphi_X} & \beta(X) \end{array}$$

Si $\alpha \in \beta(X)$ se tiene que $\beta(1_X)(\alpha) = \alpha \circ \widetilde{1_{C(X,I)}} = \alpha = 1_{\beta(X)}(\alpha)$.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi_X} & \beta(X) \\ f \downarrow & & \downarrow \beta(f) \\ Y & \xrightarrow{\varphi_Y} & \beta(Y) \\ g \downarrow & & \downarrow \beta(g) \\ Z & \xrightarrow{\varphi_Z} & \beta(Z) \end{array}$$

Si $\alpha \in \beta(X)$, $\beta(g) \circ \beta(f)(\alpha) = \beta(g)(\beta(f)(\alpha)) = \beta(g)\left(\alpha \circ \widetilde{f}\right) = \alpha \circ \widetilde{f} \circ \widetilde{g} = \alpha \circ \widetilde{g \circ f} = \beta(g \circ f)(\alpha)$; por lo tanto $\beta(1_X) = 1_{\beta(X)}$ y $\beta(g) \circ \beta(f) = \beta(g \circ f)$. Así, hemos demostrado el siguiente teorema:

Teorema 3. *β es un funtor (covariante) de la categoría Top de los espacios topológicos en la categoría T_2Comp de los espacios topológicos de Hausdorff y compactos.*

El funtor β, conocido como funtor de Stone-Čech, presenta algunas propiedades que se describirán utilizando las siguientes definiciones, tomadas de [5] y [10]:

Definición 2. *Considere dos funtores $F, G : A \to B$ de la categoría A en la categoría B. Una transformación natural $\eta : F \Longrightarrow G$ de F en G es una clase de morfismos $(\eta_A \;: F(A) \to G(A))_{A \in Obj(\mathbf{A})}$ de B indexados por los objetos de A , tal que para cada morfismo $f : A_1 \to A_2$ en A , $\eta_{A_2} \circ F(f) = G(f) \circ \eta_{A_1}$.*

Definición 3. *Sea $F : A \to B$ un funtor y B un objeto de B. Una reflexión de B por el funtor F es un par (R_B, η_B) donde:*

1. *R_B es un objeto de A y $\eta_B : B \to F(R_B)$ es un morfismo de B.*
2. *Si A es un objeto de A y $b : B \to F(A)$ es un morfismo de B, existe un único morfismo $a : R_B \to A$ en A tal que $F(a) \circ \eta_B = b$.*

Definición 4. *Un funtor $R : B \to A$ es adjunto a izquierda del funtor $F : A \to B$ si existe una transformación natural $\eta : 1_{\mathbf{B}} \Rightarrow F \circ R$ tal que para cada $B \in Obj(\mathbf{B})$, $(R(B), \eta_B)$ es una reflexión de B por el funtor F.*

Si consideramos el funtor inclusión $\hat{I}$ de $\mathrm{T_2}$Comp en Top, tenemos uno de los resultados más importantes de la sección:

Teorema 4. *El funtor β es adjunto a izquierda del funtor $\hat{I}$.*

Demostración. Considerando las Definiciones 1, 2 y 3, tenemos que $(\varphi_X : X \longrightarrow \beta(X))_{X \in Obj(\mathrm{Top})}$ es una transformación natural $\varphi : 1_{\mathrm{Top}} \Longrightarrow \hat{I} \circ \beta$ y $(\beta(X), \varphi_X)$ es la reflexión de X por $\hat{I}$, para cada $X \in$Obj(Top); por lo tanto β es adjunto a izquierda de $\hat{I}$.

3. FUNTORES DE ALEXANDROFF

El primer método general de compactación para espacios topológicos abstractos fue el de compactación por un punto de Alexandroff [2]. La construcción se diseñó para obtener una compactación de Hausdorff de un espacio topológico no compacto que necesariamente debe ser de Hausdorff y localmente compacto. Sin embargo, el mecanismo puede aplicarse a cualquier espacio topológico y el espacio resultante es compacto, y una compactación del espacio original si éste es no compacto.

A diferencia de la construcción de Stone-Čech en este caso no hay una propiedad universal y no se obtiene de manera inmediata un comportamiento funtorial para este mecanismo. Describiremos la construcción de Alexandroff ubicándola en diferentes contextos de tal manera que resulte funtorial.

3.1. Construcción de Alexandroff.

En esta sección a partir de un espacio topológico X se construye un nuevo espacio topológico X^*. El conjunto subyacente de X^* es $X \cup \{w_X\}$, donde w_X es un elemento que no pertenece a X.
Se define τ^* como $\tau \cup \{A \cup \{w_X\} : A \in \tau \text{ y } A^c \text{ es compacto en } X\}$, donde τ es la topología de X. Verifiquemos que τ^* es una topología sobre $X \cup \{w_X\}$:

Como $\varnothing \in \tau$ y $\tau \subseteq \tau^*$, tenemos que $\varnothing \in \tau^*$ y dado que $X \in \tau$ y $X^c = \varnothing$ es compacto en X, $X \cup \{w_X\} \in \tau^*$.

Si A y B son dos abiertos de X con B^c compacto en X, tenemos que $A \cap (B \cup \{w_X\}) = A \cap B$ es abierto en X y por consiguiente está en τ^*. Si A y B son abiertos en X, y A^c y B^c son compactos en X, $(A \cup \{w_X\}) \cap (B \cup \{w_X\}) = (A \cap B) \cup \{w_X\}$ es un elemento de τ^*, puesto que $(A \cap B)^c$ es compacto por ser la unión de dos compactos de X.

Para verificar que la unión de los elementos de una subcolección arbitraria de τ^* está en τ^*, seleccionamos de ésta, primero los elementos de τ y posteriormente los de $\tau^* \setminus \tau$. Si verificamos que las anteriores subcolecciones son cerradas para uniones arbitrarias y además que la unión de un elemento de τ con un elemento de $\tau^* \setminus \tau$ está en τ^*, se tiene el resultado deseado. En el primer caso, tenemos que τ es cerrado para uniones arbitrarias, puesto que τ es una topología sobre X. En el segundo caso, si $\{A_i \cup \{w_X\}\}_{i \in I}$ es una familia de elementos de τ^*,

$$\underset{i\in I}{\cup}(A_i \cup \{w_X\}) = \left(\underset{i\in I}{\cup} A_i\right) \cup \{w_X\}$$

es un elemento de τ^*, debido a que $\left(\underset{i\in I}{\cup} A_i\right)^c = \underset{i\in I}{\cap} A_i^c$ es compacto por ser un subconjunto cerrado de un compacto. Además, si A y B son elementos de τ con B^c compacto en X, $A \cup (B \cup \{w_X\}) = (A \cup B) \cup \{w_X\}$ está en τ^*, ya que $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ es compacto por ser un cerrado contenido en un compacto. Por lo tanto τ^* es una topología sobre $X \cup \{w_X\}$.

Proposición 7. *X^* es compacto y si además X no es compacto entonces X es denso en X^*.*

Demostración. Si $\mathbf{U} = \{B_j\}_{j\in J} \cup \{C_k \cup \{w_X\}\}_{k\in K}$ es un cubrimiento abierto de X^*, podemos tomar cualquier k_0 índice de K y considerar el abierto $C_{k_0} \cup \{w_X\}$. Como $C_{k_0}^c$ es compacto en X, $\{B_j\}_{j\in J} \cup \{C_k\}_{k\in K\setminus\{k_0\}}$ se puede reducir a un subcubrimiento finito de $C_{k_0}^c$. Luego, existen J_1 y K_1 subconjuntos finitos de J y K respectivamente, tales que la colección $\{B_j\}_{j\in J_1} \cup \{C_k\}_{k\in K_1\setminus\{k_0\}}$ cubre a $C_{k_0}^c$. Por lo tanto $\{B_j\}_{j\in J_1} \cup \{C_k\}_{k\in(K_1\cup\{k_0\})}$ es un subcubrimiento finito de $\mathbf{U}$ que cubre a X^*. Con lo cual se concluye que X^* es compacto.

Notando i_X como la inclusión de X en X^*, tenemos un homeomorfismo entre X e $i_X(X)$. Si tomamos una vecindad V de w_X, tenemos que $V = A \cup \{w_X\}$ y además $(A \cup \{w_X\}) \cap X$ es diferente de vacío, siempre que X sea no compacto. Luego w_X pertenece a la adherencia de X, así, de la Definición 1 tenemos que X^* es una compactación de X. En caso tal que X sea compacto,

X^* es un espacio topológico compacto para el que w_X es un punto aislado $\left(\text{es decir, } \overline{X} \neq X^*\right)$.

En lo que sigue del texto, se utilizará la letra griega ω para simbolizar la asignación de espacios topológicos compactos con respecto al mecanismo anterior, es decir, $\omega(X) = X^*$. Si X no es compacto, $\omega(X)$ se denomina compactación de Alexandroff de X.

Si consideramos una aplicación continua $f : X \longrightarrow Y$ entre espacios topológicos, definimos la aplicación $\omega(f) : \omega(X) \longrightarrow \omega(Y)$ como sigue:

$$\omega(f)(x) = f(x) \text{ si } x \in X \quad \text{y} \quad \omega(f)(w_X) = w_Y$$

donde $Y \cup \{w_Y\} = \omega(Y)$.

Tomando un subconjunto abierto B de $\omega(Y)$, tenemos que B es subconjunto de Y o $B = B' \cup \{w_Y\}$. En el primer caso la imagen recíproca de B por $\omega(f)$ será un abierto en X y por lo tanto en $\omega(X)$, puesto que $\tau \subseteq \tau^*$. En el segundo caso $\omega(f)^{-1}(B' \cup \{w_Y\}) = \omega(f)^{-1}(B') \cup \omega(f)^{-1}(w_Y) = f^{-1}(B') \cup \{w_X\}$. Luego, para que $f^{-1}(B') \cup \{w_X\}$ sea abierto en $\omega(X)$ es necesario que $\left(f^{-1}(B')\right)^c = f^{-1}(B'^c)$ sea compacto en X. Por consiguiente, en general, $\omega(f)$ no será una función continua.

En la sección 3.3 estudiaremos algunos contextos en los que $\omega(f)$ resulta continua. Necesitaremos introducir las nociones de aplicación propia, cuasipropia y fuertemente continua, y algunas proposiciones adicionales. Estas definiciones y proposiciones son tomadas de [1], [6], [11] y [12].

3.2. Compactación de Alexandroff de espacios T_2-localmente compactos.

Proposición 8. *X es T_2 y localmente compacto si y solamente si $\omega(X)$ es T_2.*

Demostración. Si $x, y \in \omega(X)$ con $x \neq y$ y $x, y \in X$, podemos separar a x de y por vecindades disyuntas, puesto que X es T_2 y $\tau \subseteq \tau^*$. Si $x \in X$ y $y = w_X$, existe V_x vecindad de x, tal que $\overline{V_x}$ es compacto en X, puesto que X es localmente compacto. Por lo tanto V_x y $\overline{V_x}^c \cup \{w_X\}$ son abiertos disjuntos que contienen a x y w_X respectivamente; luego $\omega(X)$ es T_2.

Recíprocamente: Si $\omega(X)$ es T_2 entonces X es T_2, puesto que el axioma T_2 es hereditario. Como $\omega(X)$ es compacto y T_2, $\omega(X)$ es localmente compacto, y como X es abierto en $\omega(X)$, se tiene que X es localmente compacto.

Ejemplo 2. Si consideramos el conjunto $\mathbb{Q}$ de los racionales con la topología de subespacio inducida por la recta real, $\omega(\mathbb{Q})$ no es T_2, puesto que $\mathbb{Q}$ no es localmente compacto [18].

Con el fin de ilustrar algunos ejemplos de compactaciones, se considera el siguiente resultado cuya demostración encontramos en [13].

Proposición 9. *Si X es no compacto, localmente compacto y T_2 entonces dos compactaciones de Hausdorff de X por un solo punto son topológicamente equivalentes, y por tanto topológicamente equivalentes a la compactación de Alexandroff de X.*

En los siguientes ejemplos se muestra un espacio en el que la compactación de Stone-Čech y de Alexandroff no coinciden y un espacio en el que ambas coinciden. Estos son tomados de [12] y [13].

Ejemplo 3. Si consideramos el espacio topológico $X = [0, 1)$ con la topología usual, por la proposición anterior tenemos que $[0, 1] = \omega([0, 1))$; usando el Teorema 2, tenemos que $\omega(X) \neq \beta(X)$, puesto que la aplicación continua $f : [0, 1) \to [-1, 1]$ definida por $f(x) = sen\,(1/(1-x))$ no se puede extender a una aplicación continua $\overline{f} : [0, 1] \to [-1, 1]$.

Ejemplo 4. Sea $(C, \preceq)$ un conjunto bien ordenado, no numerable y con último elemento b. Si a es el primer elemento de C, definimos el siguiente conjunto:

$$M = \{x \in C / [a, x) \text{ es no numerable}\}$$

Puesto que $b \in M$, $M \neq \varnothing$. Si Ω es el primer elemento de M, consideremos el conjunto $[a, \Omega]$ con la topología del orden, cuya base es :

$$\mathbf{B} = \{[a, x) \,/ x \in [a, \Omega]\} \cup \{(x, y) \,/ x \preceq y,\ x, y \in [a, \Omega]\} \cup \{(x, \Omega] \,/ x \in [a, \Omega]\}$$

Como $\{[a, x) \,/ x \in [a, \Omega)\}$ es un cubrimiento abierto de $[a, \Omega)$ que no se puede reducir a uno finito, tenemos que $[a, \Omega)$ es no compacto. Veamos que $[a, \Omega]$ es T_2-compacto.

Sean $x, y \in [a, \Omega]$ con $x \neq y$. Si existe algún $t \in (x, y)$, entonces $[a, t)$ y $(t, \Omega]$ son entornos disjuntos de x y y, pero si $(x, y) = \varnothing$, $[a, y)$ y $(x, \Omega]$ son una separación de x y y; por lo tanto $[a, \Omega]$ es T_2.

Para $\mathbf{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ cubrimiento abierto de $[a, \Omega]$, consideremos el conjunto:

$$A = \left\{ x \in [a, \Omega] \,/ \exists F_x \subseteq I \text{ finito con } [a, x] \subseteq \bigcup_{i \in F_x} U_i \right\}$$

$a \in A$, luego $A \neq \varnothing$, además, A es un intervalo. Como $[a, \Omega]$ es bien ordenado y está acotado superiormente, existe $c = Sup\,(A)$ $(a \prec c)$. Si suponemos que $c \prec \Omega$, como $\mathbf{U}$ es un cubrimiento abierto de $[a, \Omega]$, existe $i_0 \in I$ con $c \in U_{i_0}$. Por lo tanto existen $x, y \in (a, \Omega)$ con $x \prec y$, tales que $c \in (x, y) \subseteq U_{i_0}$, así,

$$[a, y] \subseteq \bigcup_{i \in F_x} U_i \cup U_{i_0} \cup U_{i_1} \text{ donde } y \in U_{i_1}$$

lo cual contradice que $c = Sup\,(A)$, luego $c = \Omega$. Con lo que concluimos que $\Omega \in A$, luego $[a, \Omega]$ es compacto.

Como $\overline{[a,\Omega)} = [a,\Omega]$, tenemos que $[a,\Omega]$ es una compactación T_2 de $[a,\Omega)$, implicando que $[a,\Omega)$ sea localmente compacto y T_2. Así, por la Proposición 9 $\omega([a,\Omega)) = [a,\Omega]$.

$[a,\Omega]$ es T_2-compacto, luego es normal y T_1. Para A y B subconjuntos cerrados y disjuntos en $[a,\Omega)$, verifiquemos que o A o B están acotados superiormente en $[a,\Omega)$. Si ninguno estuviera acotado, existen $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B$ tales que para todo $n \in \mathbb{N}$, $a_n \prec b_n \prec a_{n+1}$. Por la definición de Ω tenemos que

$$D = \{a_n /\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{b_n /\ n \in \mathbb{N}\}$$

está acotado superiormente en $[a,\Omega)$, puesto que de lo contrario $[a,\Omega) = \underset{n\in\mathbb{N}}{U}[a,a_n]$ sería numerable. Por lo tanto existe c, extremo superior de D en $[a,\Omega)$. Como para todo $n \in N \quad a_n \prec b_n \prec a_{n+1}$, se verifica que $c \in \overline{A} \cap \overline{B} = A \cap B$, lo cual es absurdo. Por lo tanto $\overline{i(A)} \cap \overline{i(B)} = \varnothing$, luego por la Proposición 6, se tiene que $[a,\Omega] = \beta([a,\Omega))$.Con lo cual concluimos que $[a,\Omega] = \omega([a,\Omega)) = \beta([a,\Omega))$.

3.3. Contextos en los que ω es un funtor.

Iniciamos la sección mostrando que el operador ω en cualquier contexto respeta composición e identidades, razón por la cual en adelante no verificaremos estas propiedades.

Proposición 10. *ω respeta identidades y composiciones.*

Demostración. Para los espacios topológicos X, Y y Z consideremos los siguientes diagramas:

$$\begin{array}{rcl} & X & \overset{i_X}{\hookrightarrow} \omega(X) \\ 1_X \downarrow & & 1_{\omega(X)} \downarrow\downarrow \omega(1_X) \\ & X & \overset{i_X}{\hookrightarrow} \omega(Y) \end{array}$$

Si $x \in X$, $\omega(1_X)(x) = x = 1_{\omega(X)}(x)$, y para w_X, $1_{\omega(X)}(w_X) = w_X = \omega(1_X)(w_X)$, por lo tanto $\omega(1_X) = 1_{\omega(X)}$.

$$\begin{array}{ccc} X & \overset{i_X}{\hookrightarrow} & \omega(X) \\ f\downarrow & & \downarrow\omega(f) \\ Y & \overset{i_Y}{\hookrightarrow} & \omega(Y) \\ g\downarrow & & \downarrow\omega(g) \\ Z & \overset{i_Z}{\hookrightarrow} & \omega(Z) \end{array}$$

Si $x \in X$, $(\omega(g) \circ \omega(f))\ (x) = \omega(g)(\omega(f)(x)) = \omega(g)(f(x)) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) = \omega(g \circ f)(x)$ y $(\omega(g) \circ \omega(f))(w_X) = \omega(g)(\omega(f)(w_X)) = \omega(g)(w_Y) = w_Z = \omega(g \circ f)(w_X)$, es decir $\omega(g) \circ \omega(f) = \omega(g \circ f)$.

Si nos situamos en categorías cuyos morfismos son funciones continuas, ω no podrá verse como funtor, pues $\omega(f)$ no necesariamente es continua cuando f es continua (Sección 3.1). Se requiere entonces situarse en sub-categorías convenientes de la categoría de los espacios topológicos, lo cual puede hacerse de diversas maneras. En esta sección presentamos algunas de ellas.

3.3.1. Funciones propias.

Definición 5. (Tomada de [11].) *Se dice que una aplicación $f : X \to Y$ es propia si:*

1. *f es continua.*
2. *Para todo espacio topológico Z, $f \times 1_Z$ es una aplicación cerrada de $X \times Z$ en $Y \times Z$.*

La siguiente proposición nos permite caracterizar las funciones propias.

Proposición 11. (Tomada de [6].) *Una aplicación $f : X \to Y$ es propia si y solamente si f es cerrada, continua y para todo $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ es compacto en X.*

Proposición 12. *La composición de funciones propias es propia.*

Teorema 5. *Si* $f : X \longrightarrow Y$ *es propia entonces* $\omega(f) : \omega(X) \to \omega(Y)$ *es propia.*

Demostración. Por la Proposición 13 de la siguiente sección tenemos que f envía compactos en compactos por imagen recíproca, hecho que implica la continuidad de $\omega(f)$. Ahora, si A es un subconjunto cerrado de $\omega(X)$; A es cerrado y compacto en X ó $A = A' \cup \{w_X\}$ donde A' es cerrado en X. En el primer caso $\omega(f)(A) = f(A)$, el cual es cerrado y compacto en Y puesto que f es cerrada y continua; en el segundo caso $\omega(f)(A' \cup \{w_X\}) = f(A') \cup \{w_Y\}$, donde $f(A')$ es cerrado en Y, ya que f es cerrada. Por lo tanto $\omega(f)$ es cerrada. Para $y \in \omega(Y)$ se tiene que $y \in Y$ ó $y = w_Y$. Si $y = w_Y$, $\omega(f)^{-1}(\{w_Y\}) = \{w_X\}$, el cual es un subconjunto compacto de $\omega(X)$; si $y \in Y$, $\omega(f)^{-1}(y) = f^{-1}(y)$ es un subconjunto compacto de X. Así, $f^{-1}(y)$ es un subconjunto compacto de $\omega(X)$, luego por la Proposición 11 tenemos que $\omega(f)$ es propia.

De la Proposición 12 y el teorema anterior se desprende el siguiente resultado.

Teorema 6. ω *es un funtor de la categoría* $\mathbf{Top}_p$ *de los espacios topológicos con morfismos las funciones propias en la categoría* $\mathbf{Comp}_p$ *de los espacios topológicos compactos con morfismos las funciones propias.*

3.3.2. Funciones cuasipropias.

Definición 6. (Tomada de [11].) *Se dice que una aplicación* $f : X \to Y$ *es cuasipropia si:*

1. f *es continua.*
2. f *envía compactos en compactos por imagen recíproca.*

Proposición 13. (Tomada de [11] .) *Toda aplicación propia es cuasipropia.*

La siguiente proposición es evidente.

Proposición 14. *Si $f : X \to Y$ es una aplicación continua, X es un espacio topológico compacto y Y es T_2 entonces f es propia.*

Si aplicamos la Definición 6, ω es un funtor de la categoría $\mathbf{Top}_{cp}$ de los espacios topológicos con morfismos las funciones cuasipropias en **Comp**. Por la Proposición 8 sabemos que $\omega(X)$ es T_2 siempre que X sea T_2 y localmente compacto. Por consiguiente si queremos que ω transforme funciones cuasipropias en funciones cuasipropias debemos situarnos en los espacios T_2 y localmente compactos.

En lo que sigue de esta sección los espacios serán siempre T_2 y localmente

compactos.

Teorema 7. *Si $f : X \to Y$ es cuasipropia entonces $\alpha(f)$ es cuasipropia.*

Demostración. Como $\alpha(f)$ es una función continua de un espacio topológico compacto en un espacio topológico T_2, por la Proposición 14, tenemos que $\alpha(f)$ es propia, lo cual implica que es cuasipropia (Proposición 13).

Teorema 8. *Si $f : X \to Y$ es cuasipropia y X y Y no son compactos entonces $\alpha(f)$ es la única aplicación continua que hace conmutar el siguiente diagrama.*

$$\begin{array}{ccc} X & \overset{i_X}{\hookrightarrow} & \alpha(X) \\ f\downarrow & & \downarrow\alpha(f) \\ Y & \overset{i_Y}{\hookrightarrow} & \alpha(Y) \end{array}$$

Demostración. Si existe una aplicación continua w de $\alpha(X)$ en $\alpha(Y)$ tal que $w \circ i_X = \alpha(f) \circ i_X$, tenemos que $w(X) = \alpha(f)(X)$, como $\bar{X} = \alpha(X)$ y $\alpha(Y)$ es T_2 se concluye que $w = \alpha(f)$.

Del Teorema 7 y la Proposición 8 tenemos el siguiente resultado.

Teorema 9. *ω es un funtor de la categoría $\mathbf{T_2LComp}_{cp}$ de los espacios topológicos T_2 y localmente compactos con morfismos las funciones cuasipropias en la categoría $\mathbf{T_2Comp}_{cp}$ de los espacios topológicos T_2-compactos con morfismos las funciones cuasipropias.*

En la siguiente sección se consideran aplicaciones más generales que las cuasipropias y espacios topológicos con una condición adicional.

3.3.3. Funciones fuertemente continuas.

Definición 7. (Tomada de [1] .) *Se dice que una aplicación $f : X \to Y$ es fuertemente continua si:*

1. *f es continua.*
2. *f envía abierto-compactos en abierto-compactos por imagen recíproca.*

La demostración de la siguiente proposición se encuentra en [1] y se utilizará para demostrar los resultados posteriores a esta.

Proposición 15. *Sea X un espacio de Hausdorff, localmente compacto y totalmente disconexo. El conjunto $B(X) = \{A \subseteq X : A \text{ es abierto-compacto en } X\}$ es una base para la topología sobre X.*

Teorema 10. *Si X es T_2-localmente compacto y totalmente disconexo entonces $\omega(X)$ es T_2-localmente compacto y totalmente disconexo.*

Demostración. Como X es T_2 y localmente compacto entonces $\omega(X)$ es T_2-compacto (Proposición 8), y por consiguiente T_2 y localmente compacto. Para verificar que $\omega(X)$ es totalmente disconexo, veamos cómo son los abierto-cerrados de $\omega(X)$:

A es un abierto-cerrado de $\omega(X)$ si y solamente si

$$A \in \{C \subseteq X : C \text{ es abierto-cerrado y compacto en } X\}$$
$$\text{ó } A \in \{C \cup \{w_X\} : C \text{ es abierto-cerrado en } X \text{ y } C^c \text{ es compacto en } X\}.$$

Como X es totalmente disconexo, para x y y puntos diferentes en X, existe U abierto-cerrado de X tal que $x \in U$ y $y \in U^c$. Por la Proposición 15, existe un abierto-compacto V en X tal que $x \in V \subseteq U$ y como X es T_2, tenemos que V es cerrado en X. Por lo tanto V es un abierto-cerrado de $\omega(X)$ que contiene a $\{x\}$ y no contiene a $\{y\}$. Ahora, si $x \in X$ y $y = w_X$, siguiendo la construcción anterior, existe V abierto-cerrado de $\omega(X)$ que contiene a $\{x\}$ y no contiene a $\{w_X\}$. Concluimos que $\omega(X)$ es totalmente disconexo.

Teorema 11. *Si $f : X \to Y$ es una aplicación fuertemente continua entre espacios T_2-localmente compactos y totalmente disconexos entonces $\omega(f) : \omega(X) \to \omega(Y)$ es fuertemente continua.*

Demostración. Para verificar este resultado, veamos que $\omega(f)$ envía abiertos básicos de $\omega(Y)$ en abiertos básicos de $\omega(X)$ por imagen recíproca. Si B es un abierto-cerrado de $\omega(Y)$ contenido en Y, B es abierto-cerrado y compacto en Y y $\omega(f)^{-1}(B) = f^{-1}(B)$. Como f es fuertemente continua, $f^{-1}(B)$ es

abierto-cerrado y compacto en X, luego $f^{-1}(B)$ es un abierto-cerrado de $\omega(X)$. Si B es un abierto-cerrado de $\omega(Y)$ y $B = B' \cup \{w_Y\}$, tenemos que B' es un abierto-cerrado de Y con B'^c compacto en Y y $\omega(f)^{-1}(B' \cup \{w_Y\}) = f^{-1}(B')$ $\cup \{w_X\}$. $f^{-1}(B')$ es un abierto-cerrado de X y $f^{-1}(B'^c) = \left[f^{-1}(B')\right]^c$ es compacto en X, puesto que f es fuertemente continua. Por lo tanto, $\omega(f)$ es fuertemente continua.

Del teorema anterior y del Teorema 10 se desprende el siguiente teorema.

Teorema 12. *ω es un funtor de la categoría $\mathbf{T}_2\mathbf{TDLComp}_{fc}$ de los espacios topológicos T_2, totalmente disconexos y localmente compactos con morfismos las funciones fuertemente continuas en la categoría $\mathbf{T}_2\mathbf{TDComp}_{fc}$ de los espacios topológicos T_2, totalmente disconexos y compactos con morfismos las funciones fuertemente continuas.*

3.4. Comentarios finales.

Considerando los resultados de la sección 3, en el siguiente diagrama se resumirá el comportamiento de ω y del operador inclusión $\hat{I}$ utilizando las flechas $\rightarrow$, $\dashrightarrow$ para indicar: -si es funtor- y -no es funtor- respectivamente.

$$\mathbf{Top} \underset{\hat{I}}{\overset{\omega}{\substack{\dashrightarrow \\ \longleftarrow}}} \mathbf{Top} \qquad\qquad \mathbf{Top}_p \underset{\hat{I}}{\overset{\omega}{\rightleftarrows}} \mathbf{Comp}_p$$

$$\mathbf{T}_2\mathbf{LComp} \underset{\hat{I}}{\overset{\omega}{\substack{\dashrightarrow \\ \longleftarrow}}} \mathbf{T}_2\mathbf{Comp} \qquad\qquad \mathbf{T}_2\mathbf{LComp}_{cp} \underset{\hat{I}}{\overset{\omega}{\rightleftarrows}} \mathbf{T}_2\mathbf{Comp}$$

$$\mathbf{Top}_{cp} \underset{\hat{I}}{\overset{\omega}{\substack{\longrightarrow \\ \dashleftarrow}}} \mathbf{Comp} \qquad\qquad \mathbf{T}_2\mathbf{TDLComp}_{fc} \underset{\hat{I}}{\overset{\omega}{\rightleftarrows}} \mathbf{T}_2\mathbf{TDComp}_{fc}$$

Al igual que para el funtor β sería deseable que el funtor ω tuviese adjunto a derecha en cada una de las sub-categorías consideradas, lo cual no se tiene en realidad y será demostrado a través del siguiente teorema que incluye los casos anteriormente citados.

Teorema 13. *El funtor ω no tiene adjunto a derecha en ninguna de las tres sub-categorías consideradas.*

Demostración $\mathbf{Top}_c$ y $\mathbf{T}_2\mathbf{TDLComp}_{fc}$ son sub-categorías con coproductos finitos, puesto que para la familia de espacios topológicos $(X_i)_{i=1}^n$, la suma topológica ajena $\amalg X_i$, junto con las inyecciones $(in_i : X_i \rightarrow \amalg Xi)_{i=1}^n$ es un coproducto en estas sub-categorías. Si suponemos que ω tiene adjunto a derecha, ω preserva coproductos, es decir, $(\omega\,(in_i) : \omega\,(X_i) \rightarrow \omega\,(\amalg Xi))_{i=1}^n$ es un coproducto en $\mathbf{Top}_c$ y $\mathbf{T}_2\mathbf{TDLComp}_{fc}$, respectivamente; lo cual es contradictorio puesto que $\omega\,(\amalg X_i)$ no es homeomorfo a $\amalg\omega\,(X_i)$.

En el caso de la categoría $\mathbf{T}_2\mathbf{LComp}_{cp}$ podemos considerar sin restricción alguna el coproducto de una familia $(X_\mu)_{\mu\in M}$ arbitraria de espacios topológicos y llegar a la conclusión anterior. Así, concluimos que ω no tiene adjunto a derecha en ninguna de las sub-categorías consideradas.

Bibliografía

[1] Acosta, L., Una demostración algebraica de la unicidad del conjunto de Cantor, Tesis de Magister, Universidad Nacional de Colombia, 1988.

[2] Alexandroff, P., Zur Theorie der topologischen, Räume, Math. Ann. 92 (1924), 258-266.

[3] Aull, C., Lowen, P. (Ed.), Handbook of the history of general topology, Vol 1, Kluwer Academic Publishers, 1998.

[4] Aull, C., Lowen, P. (Ed.), Handbook of the history of general topology, Vol 2, Kluwer Academic Publishers, 1998.

[5] Borceux, F., Basic Category Theory, Cambridge University Press,1994.

[6] Bourbaki, N., General Topology, Addison-Wesley, 1966.

[7] Čech, E., On bicompact spaces. Ann. of Math. 38 (1937), 823-844.

[8] Hu, S., General Topology, Holden-Day, 1964.

[9] Lima, L., Elementos de Topologia Geral, Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1976.

[10] Mac Lane., Categories for the Working Mathematician, Springer-Verlag, 1971.

[11] Margalef, J. et al., Topología, Vol. 1, Alhambra, Madrid, 1980.

[12] Margalef, J. et al., Topología, Vol. 2, Alhambra, Madrid, 1980.

[13] Margalef, J. et al., Topología, Vol. 3, Alhambra, Madrid, 1980.

[14] Munkres, J. R., Topología, Ed. 2, Prentice-Hall, 2002.

[15] Salicrup, G., Introducción a la Topología, Sociedad Matemática Mexicana, 1997.

[16] Stone, M., Applications of the theory of Boolean rings to general topology. Trans. Amer. Math. Soc. 41 (1937), 375-481.

[17] Stone, M., On the compactification of topological spaces. Ann. Soc. Polon. Math. 21 (1948), 153-160.

[18] Steen, L., Seebach, J., Counterexamples in topology, Winston, 1970.

Recibido: Septiembre de 2007. Aceptado para publicación: Abril de 2008