

ESTUDIO DE ALGUNAS CUESTIONES DE ESTADISTICA DESCRIPTIVA SEGUN LA TEORIA DE PIAGET

ANDRES NORTES CHECA
JOSE MANUEL SERRANO GONZALEZ-TEJERO

RESUMEN

Analizamos desde la perspectiva de si se trata de una operación propia del período de las operaciones concretas o del período de las operaciones formales las siguientes cuestiones de estadística descriptiva: Ordenar, agrupar y clasificar datos; Frecuencia absoluta y relativa, Población y Muestra; Representaciones gráficas, Media, Mediana y Moda.

ABSTRACT

From the perspective of whether it is an operation belonging to the period of concrete operations or to the period of formal operations, we analyze the following questions of descriptive statistics: ordering, grouping and classifying data; absolute and relative frequency; population and sample; graphics representation; Mean, Median and Mode.

PALABRAS CLAVE

Enseñanza-aprendizaje, Estadística descriptiva, Piaget.

KEYWORDS

Teaching-learning, Descriptive Statistics, Piaget.

1. INTRODUCCION

Piaget (1986) establece tres períodos de desarrollo:

1. Período Sensoriomotor (0-2 años).
2. Período de Preparación y Organización de las Operaciones Concretas (2-11 años).

3. Período de Operaciones Formales (12-16 años), que marcan y aglutinan las características fundamentales del desarrollo desde el nacimiento hasta la adolescencia. Nuestro trabajo se va a centrar en la transición del segundo al tercero de estos períodos de desarrollo.

Según Cockcroft (1985, 124) "un alumno medio está capacitado para ello a los 11 años pero no a los 10, aunque hay alumnos que a los 14 años no pueden hacerlo y otros de 7 años si lo hacen". Orton (1990, 88) realiza un gráfico ilustrativo sobre la relación entre las etapas piagetianas y las edades -presenta un desarrollo cognitivo tal que, en términos

piagetianos, ha alcanzado (salvo posibles decalages) el equilibrio general de las llamadas operaciones concretas, las cuáles, actuando sobre lo real en el plano de lo continuo o lo discreto, han venido a constituir, respectivamente, lo que se ha dado en llamar operaciones infralógicas y operaciones lógicas. Esto equivale a decir que, por término general, los sujetos que alcanzan este nivel de desarrollo son capaces de operar en un estadio tridimensional, establecer covariaciones cuantificadas entre fuerza y movimiento, considerar y operar con los cambios de velocidad de un móvil, etc., gracias a un afianzamiento de las estructuras aditivas y multiplicativas que permite una creciente coordinación de las mismas a lo largo de todo el subperíodo operacional concreto lo que, por otra parte, ha dado paso a la constitución de los llamados grupos numéricos y a la medición.

Los logros adquiridos a lo largo de este periodo versan, por tanto, sobre representaciones de acciones aplicadas a lo real. Es decir, durante los primeros estadios del desarrollo del periodo de preparación y organización de las operaciones concretas, la aparición de la función semiótica, la interiorización de la imitación e imágenes y la adquisición del lenguaje permitió al sujeto la condensación de las acciones sucesivas en representaciones simultáneas concediendo al pensamiento una creciente movilidad retroactiva y anticipadora que le permitió alcanzar una reversibilidad susceptible de asegurar la conservación de los puntos de partida pero ligada siempre a objetos y transformaciones reales. Sin embargo, el equilibrio general alcanzado en este momento del desarrollo va a permitir a los sujetos desligar las formas de los contenidos al tiempo que, al relativizar ambos aspectos, las primeras podrán jugar el papel de los segundos dando paso a la aplicación de formas sobre formas (operaciones a la segunda potencia) y donde las segundas actúan como contenidos de las primeras.

De esta manera, las operaciones formales marcan un nuevo período de desarrollo en donde el conocimiento sobrepasa lo real para ligar lo posible y lo necesario sin el intermediario de lo concreto.

2. ESTADISTICA DESCRIPTIVA

Es la Estadística Descriptiva un Bloque de conocimientos en la Enseñanza Obligatoria -Ciclo Superior-, ampliado y desarrollado en B.U.P. / C.O.U. y F.P., llegando a ser materia importante en la mayoría de los estudios universitarios ya que tanto carreras de Ciencias como de Letras incluyen la Estadística como asignatura de su Plan de Estudios.

Por todo lo anterior hemos elegido algunas cuestiones de Estadística Descriptiva para analizarlas bajo la teoría de Piaget y que desarrollamos a continuación:

1. Ordenar, agrupar y clasificar datos estadísticos para confeccionar tablas de fenómenos estadísticos de una variable

Se trata de una *Operación Concreta* puesto que sólo consiste en ordenar, agrupar y clasificar, propia de este periodo.

2. Distinguir la frecuencia absoluta de la frecuencia relativa

La frecuencia absoluta es el número de veces que aparece cada valor de una variable y como tal sólo necesita de una operación concreta, es decir, con la noción de agrupar y contar le es suficiente.

La frecuencia relativa, que es el cociente de dos números en una *Operación Concreta*.

3. Distinguir los conceptos de población o colectivo y muestra representativa

El concepto de población es concreto, no ofrece ninguna dificultad, así como el concepto de muestra, que es un subconjunto de la población. Sin embargo, la muestra representativa cabe analizarla bajo dos aspectos: a) si la afijación es igual y b) si la afijación es proporcional.

a) Cuando la *afijación es igual* se toman en los estratos de la población el mismo número de elementos aunque los tamaños de los estratos sean distintos. En este caso la muestra no es muy representativa pero se trata de una operación concreta ya que no necesita más que de una división.

b) Cuando la *afijación es proporcional* supone el tomar la muestra representativa de forma proporcional a los elementos de cada estrato, es decir, que si la población la componen alumnos de B.U.P. y queremos tomar una muestra representativa, habría que dividir la población en los estratos de 1º de B.U.P., 2º de B.U.P. y 3º de B.U.P. y dentro de ellos tomar una muestra proporcional a los alumnos de cada curso, es decir:

$$n / N = n_1 / N_1 = n_2 / N_2 = n_3 / N_3$$

lo que supone el conocimiento de la proporción, ya que n y N son conocidos, así como N_1 , N_2 y N_3 , habiendo que determinar n_1 , n_2 y n_3 .

Si se determinan como fracciones equivalentes será una operación concreta (Nortes y Serrano, 1991), pero si se determina con el esquema de proporción, es decir,

$$\begin{aligned} n / N &= c & y \\ n_1 &= c N_1 \\ n_2 &= c N_2 \\ n_3 &= c N_3 \end{aligned}$$

se tratará de una operación formal.

Por tanto, la muestra representativa elegida según una afijación proporcional entraría en el campo de las *Operaciones Formales* al tener que aplicar el esquema de proporción que es formal.

4. Representar gráficamente los datos recogidos en una tabla estadística

Las representaciones gráficas de diagramas de barras, cartogramas y pictogramas no ofrecen ninguna dificultad pudiendo integrarse como operaciones concretas. Todas estas representaciones gráficas corresponden a variables de tipo concreto o puntuales.

Sin embargo, la representación del gráfico de sectores de una distribución, bien sea discreta o continua, y la representación gráfica en el histograma de una distribución de tipo continuo van a detallarse debido a su importancia.

En la representación gráfica de tipo continuo, el histograma consiste en dibujar rectángulos de área igual o proporcional a la frecuencia de cada intervalo. Cuando todos los intervalos son de la misma amplitud no hay ninguna dificultad, porque suponiendo la base la unidad, se pueden levantar rectángulos de altura igual a la frecuencia absoluta y el área sigue siendo igual a dicha frecuencia absoluta. Sin embargo, cuando las amplitudes son distintas cada rectángulo tiene como área la frecuencia absoluta:

$$\text{frecuencia} = \text{área} = \text{amplitud} \times \text{altura}$$

y el área de cada rectángulo será igual o proporcional a la frecuencia absoluta con lo cual se está introduciendo la proporcionalidad que es una *Operación Concreta*.

Por tanto, la representación gráfica del histograma cuando todos los intervalos son de la misma amplitud se puede considerar como una operación concreta y cuando los intervalos son de distinta amplitud como una operación formal.

En el histograma se tiene la proporcionalidad con respecto al área, una cosa es la proporcionalidad con respecto a la altura y otra la proporcionalidad con respecto al área que es una medida sobre una medida, es una operación a la segunda potencia. La proporcionalidad es en función de dos medidas, de la altura y de la base.

Con el gráfico de sectores lo que hacemos es un diagrama ya que suponiendo la base la misma (grados) dividimos los 360 grados de la circunferencia en secciones, estamos estableciendo proporciones y se puede asimilar al diagrama de barras.

Sin embargo, los gráficos de sectores vienen acompañados con el valor de la frecuencia expresado en %, es decir, se establece una proporción primero para ver el ángulo del sector circular y después se establece otra proporción para expresar la frecuencia en %. Son dos operaciones, que consisten en una proporción y en una transformación de unidades de sexagesimal a centesimal.

Podríamos dar una primera apreciación diciendo que los gráficos de variable discreta es una operación concreta puesto que hasta el caso del gráfico de sectores podría representarse solamente sin necesidad de añadir el porcentaje, que supone efectuar una transformación de unidades.

Lo continuo supone entrar en otra cuestión donde la continuidad matemática es una operación formal. Cuando se toman intervalos donde la variable puede tomar cualquier valor en ese intervalo no se tiene una cosa concreta y es necesariamente formal.

Analizando con mayor profundidad el gráfico de sectores, se puede llegar a los grados del sector de dos formas distintas, una mediante fracciones equivalentes y otra mediante la proporcionalidad.

Con fracciones equivalentes, si tenemos por ejemplo unas frecuencias de 18, 12 y 10, mediante fracciones equivalentes ponemos $10/40$ y tenemos que buscar por qué número multiplicar numerador y denominador para encontrar un denominador de 360

$$10 / 40 = 20 / 80 = 30 / 120 = 40 / 160 = 50 / 200 = 60 / 240 = 70 / 280 = 80 / 320 = 90 / 360$$

y de esta forma 90 serán los grados del sector correspondiente a la frecuencia 10. Esto es correcto, aunque en el límite de lo concreto a lo formal.

Pero lo normal para calcular el ángulo del gráfico de sectores es calcular la proporción $10 / 40 = 0,25$ y ese número que es la razón, multiplicarlo por 360. O bien determinar la razón $360 / 40$ y ese número multiplicarlo por 10 obteniendo en los dos casos 90. Esto es formal, es un esquema de proporcionalidad.

Si ponemos

$$10 / 40 = ? / 360$$

el numerador es proporcional al denominador y si el denominador se ha multiplicado por 9 el numerador se tiene que multiplicar por 9 para mantener la proporcionalidad. Esto es formal.

Otra cosa es que se diga de construir el conjunto de fracciones equivalentes de $10/40$ y así nos encontramos con que una es $90 / 360$, esto es una intuición de la proporcionalidad, que es concreto. Es una intuición porque no es reversible, porque el sujeto no genera el esquema reversible ya que

$$10 / 40 = 90 / 360$$

para que sea reversible la proporción la podemos hacer en vertical y en horizontal, si tenemos 360, 40 y 10 el sujeto puede hacer para llegar al 90 la proporcionalidad entre los numeradores $10 / 40$ y por 360 o bien la proporcionalidad de los denominadores y por 10, el sujeto coordina estas dos proporcionalidades y es formal por aplicar a valores distintos esquemas coordinados. Se aplica a valores distintos en el sentido posicional, es decir, son 40 partes en que se divide el todo y las que se toman son 10, al mismo tiempo tenemos un todo de 360 partes de las cuales tomamos 40, este paso de 360 a 40 no es correcto, no existe nada en la realidad que nos permita hacerlo concreto, es un esquema de proporcionalidad. Pero resulta que 360 es un todo y 40 es también un todo, además, el mismo todo, ¿cómo se pueden establecer proporcionalidad entre dos cosas idénticas? Esto es formal.

Cuando ponemos la relación $40 / 360$ no quiere decir que de 360 partes tomo 40, cuando establecemos la relación entre estos números ponemos en marcha un esquema de proporcionalidad.

Cuando aplicamos una regla de tres, y esto no es más que una regla de tres, estamos aplicando una proporcionalidad en los dos sentidos que es una operación formal.

Concretando, siempre que determinemos un valor por medio de fracciones equivalentes será una operación concreta pero cuando apliquemos una razón, cuando apliquemos una proporcionalidad en los dos sentidos o cuando apliquemos una regla de tres estaremos en una operación formal.

Cuando además añadimos al gráfico de sectores el tanto por ciento que supone respecto del total si lo obtenemos mediante una regla de tres o mediante la razón, será una *Operación Formal*.

5. Calcular las medidas de posición central: Media, Mediana y Moda

La media es el centro de gravedad de una distribución de frecuencias. El concepto de centro de gravedad es una operación formal. Sin embargo se puede introducir a nivel intuitivo diciendo: Supongamos una regla que no tiene masa, se puede encontrar un punto en el cual la distribución de frecuencias esté equilibrada, ese punto es la media.

La media es un valor tal que colocado el fulcro de una balanza, ahí se queda en equilibrio la distribución de frecuencias. Conceptualizar la media es una operación formal aunque se introduce a nivel intuitivo como una operación concreta, el concepto de media es una operación formal. Se puede utilizar unos cubos representando la unidad de frecuencia y establecer un diagrama de barras con estos cubitos como frecuencias, se comprueba que si esto se hace sobre una regla y se coloca un fulcro, en el punto donde se obtiene el equilibrio (c.d.g.), ese punto es la media.

Si introducimos la media como preconcepto podríamos utilizar para calcular la media de la puntuación de cuatro alumnos de notas 0, 4, 6 y 10, la media aritmética sería con valor representativo y suponiendo que cada punto equivale a un vale diríamos, ¿cómo repartir los vales para que los cuatro tuvieran el mismo valor? Pues sumando todos los vales y dividiendo por 4, se hace una suma y un cociente; el preconcepto de la media es una operación concreta. Sería repartir por igual todos los puntos de una distribución de frecuencias.

La intuición sería concebir esto como un valor que deja en equilibrio la distribución de frecuencias, es decir que colocado en una regla numerada un cubo en el 0, otro en el 4, otro en el 6 y otro en el 10, se obtendría el equilibrio colocando el fulcro en el número 5 de la regla, 5 sería la media aritmética.

El concepto sería concebir la media como el centro de gravedad de una distribución de frecuencias. Se conceptualiza la media en función del centro de gravedad y de una posición de equilibrio para el caso intuitivo.

El concepto de mediana para distribución de tipo discreto sería concreto y para variable continua sería formal porque para su obtención se incluye una demostración en donde interviene la semejanza de triángulos y por consecuencia un esquema de proporción que es característico de las operaciones formales.

Se suele utilizar la media para variables de intervalos, la mediana para distribuciones ordinales o de tipo discreto y la moda para distribuciones nominales o de atributos, siendo en este caso y debido a su aplicación operaciones concretas.

La media, mediana y moda habría que enseñarlas a nivel intuitivo y por lo tanto sería a nivel concreto. Sin embargo el concepto como tal de media habría que darlo una vez que tuvieran el concepto de centro de gravedad y esto es operación formal. Otro tanto ocurre con la mediana y moda de distribuciones de tipo continuo mediante intervalos que serán *Operaciones Formales* debido a la complejidad de su cálculo basado en proporciones que es formal.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- COCKCROFT, W. (1985): *Las matemáticas sí cuentan*. MEC, Madrid.
- FLAVELL, J. (1979): *La psicología evolutiva de Jean Piaget*. Paidós, Barcelona.
- INHELDER, B. y PIAGET, J. (1985): *De la lógica del niño a la lógica del adolescente*. Paidós, Buenos Aires.
- KEAT, J.A.; COLLIS, K.F. y HALFORD, G.S. (1978): *Cognitive Development. Research based on a Neo-Piagetian approach*. Wiley y Sons, N. York.
- NORTES, A. (1987): *Encuestas y precios*. Síntesis, Madrid.
- NORTES, A. y SERRANO, J.M. (1991): *Operaciones concretas y formales*. Servicio de Publicaciones Universidad de Murcia, Murcia.
- ORTON, A. (1990): *Didáctica de las matemáticas*. MEC-Morata, Madrid.
- PIAGET, J. (1986): *La epistemología genética*. Debate, Madrid.