GRAFOS E MATRICES

Francisco Botana Ferreiro
Departamento de Matemática Aplicada
Universidade de Vigo

No proposto curriculum do novo Bacharelato aparece un tema titulado "Grafos e Matrices". Esta inclusión ten, ó meu ver, un dobre obxectivo: por unha banda apórtase unha nova xustificación da utilidade das matrices e pola outra introdúcese o alumno na teoría dos grafos. O fincapé faise no uso das matrices como representación dos grafos pero tamén cómpre sinala-lo interese que ten *per se* unha breve mención da teoría de grafos. Estes teñen existido dende hai moito tempo: sabido é que as árbores, un tipo especial de grafos, datan do terceiro día da creación.

GRAFOS

A terminoloxía inglesa da teoría de grafos aínda non está completamente estandarizada e as distintas traduccións introducen novas complicacións. Co ánimo de non aumenta-la confusión, aquí seguimos principalmente os termos empregados por Wilson no seu excelente texto introductoriop.[1]

Introducimos os elementos básicos da teoría definindo brevemente algúns deles. Un grafo G é un par (N, A) onde N = {i, j, k, ...} é un conxunto finito non baldeiro de elementos chamados nodos, e A = {{i, j}, ...} unha familia finita de pares non ordenados de nodos, que chamamos arestas. Unha aresta da forma {i, i} chámase lazo. Se na familia A hai pares repetidos, estes chámanse arestas múltiples. Un grafo G é simple se non contén lazos nin arestas múltiples. A orde de G é o cardinal de N. Dunha aresta {i, j} dice que incide nos nodos i e j. Dous nodos son adxacentes se o grafo ten algunha aresta incidente neles. Dúas arestas son adxacentes se teñen algún nodo común. O grado dun

1 R.J. Wilson: *Introduction to Graph Theory*, Academic Press, Nova Iorque, 1972, e Longman Group, Essex, 1975. trad. castelá de E. García Camarero, *Introducción a la teoría de Grafos*, Alianza, Madrid, 1983).

nodo é o número de arestas que inciden nel. Dun nodo de grado cero dise que é illado. Un grafo simple de orde n no que cada dous nodos son adxacentes chámase grafo completo, K_n. Este e os seguintes grafos móstranse na figura 1. Un polígono de n lados define un grafo circuíto, C_n. A roda R_n obtense unindo un novo nodo con cada un dos de C_{n-1}. Un grafo de orde n sen arestas é o grafo nulo, N_n. Un grafo é bipartido se o seu conxunto de n nodos poder ser dividido en dúas partes de r e s nodos, de xeito que cada nodo da primeira parte é adxacente a un nodo da segunda; se a adxacencia é con tódolos nodos de outro subconxunto tense un grafo bipartido completo, $K_{r,s}$. Un grafo $k_{1,s}$ é unha estrela de s puntas.

Unha sucesión finita de arestas $i_0i_1, i_1i_2, ..., i_{p-1}i_p$ é un paso nun grafo G. A lonxitude dun paseo é o número de arestas que o forman. Se nun paseo non hai dúas arestas iguais este chámase camiño. Un camiño é simple se tódolos nodos son distintos, salvo quizais o primeiro e o último. Se estes son iguais, o camiño é cerrado. Un camiño simple cerrado chámase circuíto.

Introducindo un sentido de percorrido nas arestas obtemos o concepto de dígrafo. Un grafo dirixido ou dígrafo D é un par (V, A), onde V é un conxunto finito non baldeiro de vértices e A é unha familia finita de pares ordenados de elementos de V, arcos. As relacións de adxacencia e incidencia en grafos, así como as definicións relativas a camiños, esténdense de xeito natural ó dígrafos.

MATRICES COMO REPRESENTACIÓN DOS GRAFOS

Mentres que a representación pictórica dos grafos é, sen dúbida, a máis conveniente para a súa comprensión efectiva, as tornas cambian moito se o que se pretende é usalos para traballar con eles como modelos dunha situación. Calquera tratamento computacional que involucre os grafos esixe unha representación alternativa. Basicamente hai dúas estructuras de datos para representa-los grafos: matrices e listas de adxacencia.

Se G = (N, A) é un grafo de orde n, a matriz de adxacencia de G, $A_G = (a_{ij})$ é unha matriz cadrada simétrica de orde n, onde a_{ij} é o número de arestas que unen os nodos i e j. Se G é simple, os elementos de A_G son ceros ou uns e a diagonal principal está formada por ceros.

Outra matriz que codifica e G, tendo A m arestas, é a matriz de incidencia, $B_G = (b_{ij})$, unha matriz de tipo nxm, onde b_{ij} é 1 se a aresta j incide no nodo i, e 0, noutro caso.

As matrices de adxacencia e incidencia para dígrafos defínense de igual xeito. Nótese, sen embargo, que a matriz de adxacencia dun dígrafo D = (V, A), A_D, non é, en xeral, simétrica.

Sí asociamos a cada arco do dígrafo D unha etiqueta, que expresará en sentido amplo un custo ou unha lonxitude, pódese defini-la matriz de custos,

$C_D = (C_{ij})$, como matriz de orde a de D, onde C_{ij} é o custo asociado ó arco (i, j), ou ∞, de non haber arco i a j.

Aínda que non é central ó tema que nos ocupa, é conveniente comentar brevemente a segunda estructura citada. Nesta respresentación asóciase a cada nodo i de G unha lista na que cada elemento é un par (j, p), onde j é un nodo adxacente a i, e p un enteiro positivo que indica o número de arestas {i, j}. Se G é simple, os pares (j, p) substitúense por j. En grafos de orde elevada con pequeno número de arestas, as matrices de adxacencia son case baldeiras (en inglés, sparce) e as vantaxes das listas de adxacencia fronte á matrices fanse claras, pois usan un espacio proporcional á orde do grafo; sen embargo, o aforro no espacio paga o precio de ter que utilizar algoritmos menos sinxelos.

Nas figuras 2 e 3 vense as matrices e as listas de adxacencia dun grafo e un dígrafo.

PASEOS E CAMIÑOS EN GRAFOS E DÍGRAFOS

Tradicionalmente, no ensino non universitario das Matemáticas, as aplicacións máis importantes das matrices foron as representacións dos sistemas de ecuación lineais e das rotacións de eixos no plano. Ademais, con frecuencia estas ilustracións a penas se saían do ámbito estreito da propia disciplina. Co ánimo de subliña-la utilidade das matrices e, en xeral, a das Mateméticas recordamos nesta sección unha cuestión básica da teoría de grafos que require o cálculo matricial para a súa resolución.

Se enumerámo-los camiños de lonxitude de un no dígrafo D da figura 4, obtemo-los seguintes: ij, ik, ji, kj. A matriz de adxacencia A_D é

$$\begin{array}{c|ccc|} & i & j & k \\ i & 0 & 1 & 1 \\ j & 1 & 0 & 0 \\ k & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Multiplicando a matriz por si mesma, vemos que os elementos de producto teñen un significado ben claro: O elemento 12 da matriz A_D^2 é

$$(0\ 1\ 1)\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} = 0{\bullet}1 + 1{\bullet}0 + 1{\bullet}1 = 1$$

onde o termo $0{\bullet}1$ quere dicir que non existe o camiño ii, ij; o termo $1{\bullet}0$, que non existe o camiño ij, jj, e o termo $1{\bullet}1$, que existe un só camiño de i a j, ik, kj. É evidente que os camiños mencionados son todos de lonxitude dous. É sinxelo demostrar, por exemplo por inducción, que a matriz A_D^n conta o número de camiños de lonxitude n entre vértices do dígrafo D. A proposición tamén é verdadeira para grafos non dirixidos.

Unha pequena variación permitiranos calcula-lo número de camiños simples e sen repetir nodos nun grafo, á vez que introducimos unha operación non numérica. Se considerámo-lo grafo da figura 5 e modificámo-la súa matriz de adxacencia de xeito que en lugar de anotar 1, se os nodos i e j son adxacentes, escribimos i j nese elemento, resulta:

$$M_1 = \begin{vmatrix} 0 & AB & 0 & 0 & AE \\ BA & 0 & BC & BD & BE \\ 0 & CB & 0 & CD & 0 \\ 0 & DB & DC & 0 & DE \\ EA & EB & 0 & ED & 0 \end{vmatrix}$$

Definimos outra matriz, M, suprimindo o primeiro símbolo nos elementos non nulos da matriz M_1

$$M = \begin{vmatrix} 0 & B & 0 & 0 & E \\ A & 0 & C & D & E \\ 0 & B & 0 & D & 0 \\ 0 & B & C & 0 & E \\ A & B & 0 & D & 0 \end{vmatrix}$$

e dando unha nova definición de producto de matrices, como segue:

$$M_2(i,j) = \{m_1(i,k) \circ M(k,j) \;/\; 1 \le k \le 5,\; m_1(i,k) \sum M_1(i,k),\; m_1(i,k) \ddagger 0 \ddagger M(k,j),\; m_1(i,k) \prod M(k,j) = \emptyset \}$$

onde o representa a concatenación de símbolos; M_2 (i, j) é a matriz da que os elementos son os conxuntos de camiños simples de dúas arestas dende i hasta j (os conxuntos unitarios represéntanse sen chaves).

Se continuamos a calcula-las matrices sucesivas, obtemos:

$$M2{=}M1{=}xM{=} \begin{vmatrix} 0 & AEB & ABC & \{ABD,AED\} & ABE \\ BEA & 0 & BDC & \{BCD,BED\} & \{BAE,BDE\} \\ CBA & CDB & 0 & CBD & \{CBE,CDE\} \\ \{DBA,DEA\} & \{DCB,DEB\} & DBC & 0 & DBE \\ EBA & \{EAB,EDB\} & \{EBC,EDC\} & EBD & 0 \end{vmatrix}$$

$$M_3{=}M_2xM{=} \begin{vmatrix} 0 & AEDCB & \{AEBC,ABDC,AEDC\} & \{AEBD,ABCD,ABED\} & ABDE \\ BDEA & 0 & BEDC & BAED & BCDE \\ \{CDBA,CBEA,CDEA\} & CDEB & 0 & CBED & \{CBAE,CDBE,CBDE\} \\ \{DCBA,DEBA,DBEA\} & DEAB & DEBC & 0 & \{DBAE,DCBE\} \\ EDBA & EDCB & \{EABC,EDBC,EBDC\} & \{EABD,EBCD\} & 0 \end{vmatrix}$$

$$M4{=}M3xM{=} \begin{vmatrix} 0 & AEDCB & \{AEDBC,AEBDC,ABEDC\} & AEBCD & ABCDE \\ BCDEA & 0 & BAEDC & 0 & 0 \\ \{CDEBA,CDBEA,CBDEA\} & CDEAB & 0 & CBAED & CDBAE \\ DCBEA & 0 & DEABC & 0 & DCBAE \\ EDCBA & 0 & EABDC & EABCD & 0 \end{vmatrix}$$

onde a matriz M4 contén tódolos camiños simples sen reperición de nodos e de lonxitude catro.

APLICACIÓNS

Como ilustración da obtención exposta dos camiños en grafos e dígrafos propoñemos dous exemplos: o primeiro está tomado da Socioloxía e o segundo presenta os procesos de Markov a través dun sinxelo modelo xenético.

A aplicación da teoría de grafos ás ciencias sociais iníciase no segundo tercio deste século e consiste, nun primeiro estadio, na utilización dos grafos e, principalmente, dos dígrafos e das súas matrices de adxacencia para modelizalas relacións entre certas veriables.

Se considerámo-lo grafo da figura 5 como un modelo da comunicación existente entre cinco persoas, Alba, Brais, Carlos, Daniela e Eduardo, a segunda potencia da matriz de adxacencia

$$A_G = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$A_G^2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

mostra, por non conter ningún cero, que a información posuída por un deles pode ser coñecida por calquera outro a través de un intermediario como máximo. Se, por exemplo, o obxecto de estudio é a difusión de rumores, a matriz M4 permite calcula-las vinte posibilidades directas de transmisión dun rumor.

Unha relación nun conxunto na que cada dous elementos están relacionados de xeito único da lugar a un dígrafo chamado torneo. O nome suxire o exemplo: un campionato de tenis de n participantes pode representarse mediante un torneo. Os torneos tamén serven para estudiar relacións sociolóxicas. Se entre Alba, Brais, Carlos e Daniela existe a relación de dominación mostrada na figura 6, pódese demostrar que existe alomenos unha persoa que domina a tódalas outras, ben directamente, ben a través doutra. Esta propiedade, idéntica á citada para o grafo de comunicación, non depende coma alí do grafo particular, senón que é verdadeira en calquera torneo. Podemos preguntar quen é o individuo "máis dominante", ou, noutros termos, que vértice do dígrafo ten maior número de camiños de lonxitude un ou dous cós vértices restantes. Se sumámo-las dúas primeiras potencias da matriz de adxacencia e, na matriz resultante, sumámo-los elementos de cada fila

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \sum \begin{matrix} \rightarrow 3 \\ \rightarrow 2 \\ \rightarrow 4 \\ \rightarrow 5 \end{matrix}$$

tense que a persoa máis dominante é Daniela.

Interpretando os vértices do dígrafo da figura 7 como os xenotipos de certos individuos e as etiquetas dos arcos como a probabilidade de que, cruzados aqueles con individuos de xenotipo predeterminado (neste caso, o AA), a seguinte xeración sexa do xenotipo indicado no vértice de chegada, os camiños no dígrafo poden interpretarse como cadeas de Markov. A matriz de adxacencia recibe entón o nome de matriz estocástica ou de probabilidades, e as súas potencias permiten calcula-la distribución xenotípica nas sucesivas xeracións.

	AA	Aa	aa
AA	1	0	0
Aa	1/4	1/2	1/4
aa	0	1	0

Resulta interesante tamén a tradución a linguaxe de grafos dun tipo de ecuacións lineais. Un sistema homoxéneo de ecuacións lineais no que o número de incógnitas non sexa menor có número de ecuacións, pode ser escrito como un dígrafo con arcos etiquetados e, reciprocamente, un tal dígrafo poder ser reescrito como un sistema homoxéneo. Se, dende unha perspectiva sociolóxica, se supón que a renda,x1, inflúe na educación , x2, e no prestixio social, x3, e que a educación inflúe tamén no prestixio, estamos a construir un modelo representable polo dígrafo da figura 9, que é traducible ó sistema.

$$\begin{cases} x_2 = ax_1 \\ x_3 = bx_1 + cx_2 \end{cases}$$

Un resultado análogo ó de Cramer na linguaxe de grafos é a regra de Mason. Aínda que non é axeitado expoñela aquí[2], si diremos que en certos casos resulta máis sinxela de aplicar cá solución clásica do sistema.

2. Pode atoparse por exemplo en W.K.Chen: *Applied Graph Theory: Graphs and Electrical Networks*, North-Holland, Amsterdam, 1976.

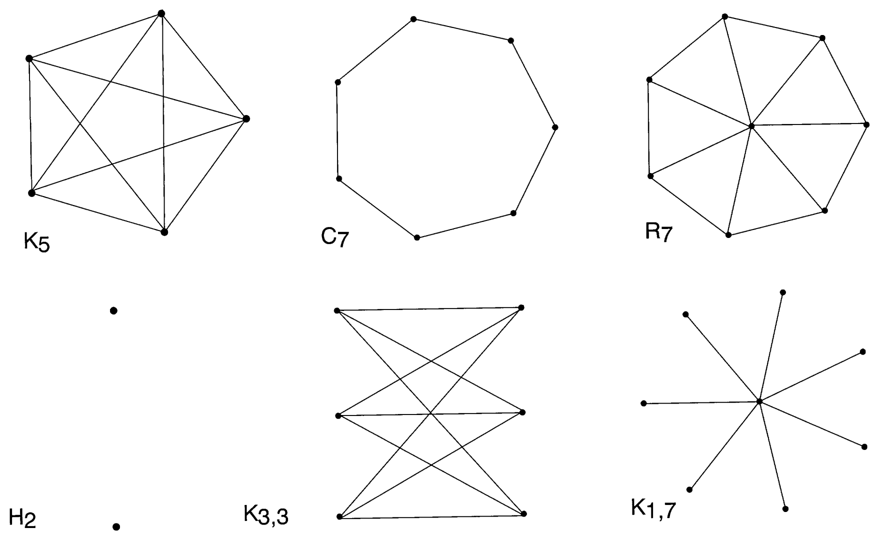
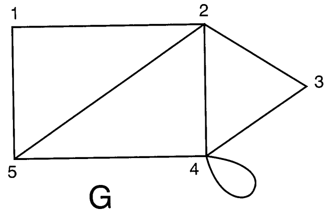


FIGURA 1



$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

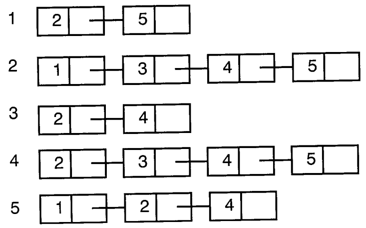
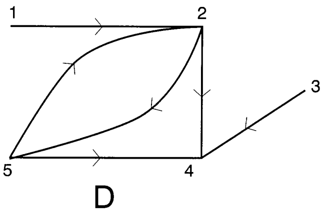


FIGURA 2



$$A_D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

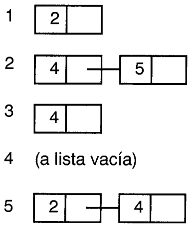


FIGURA 3

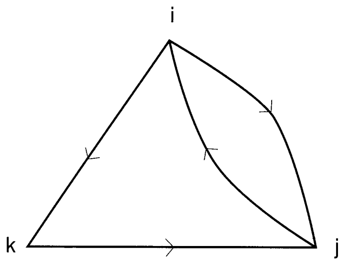


FIGURA 4

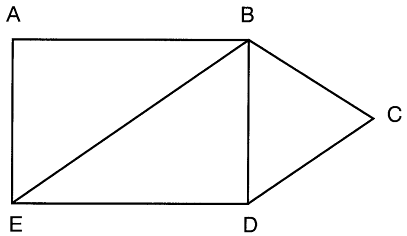


FIGURA 5

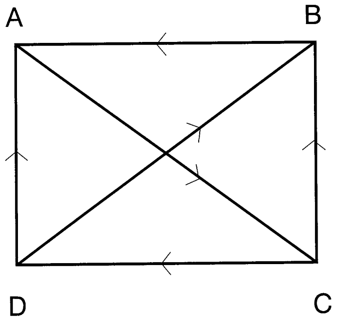


FIGURA 6

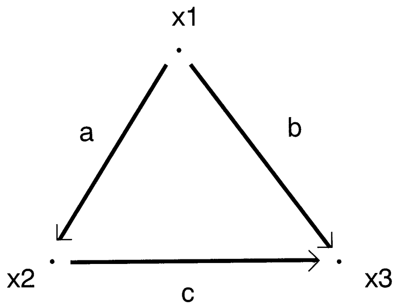


FIGURA 8

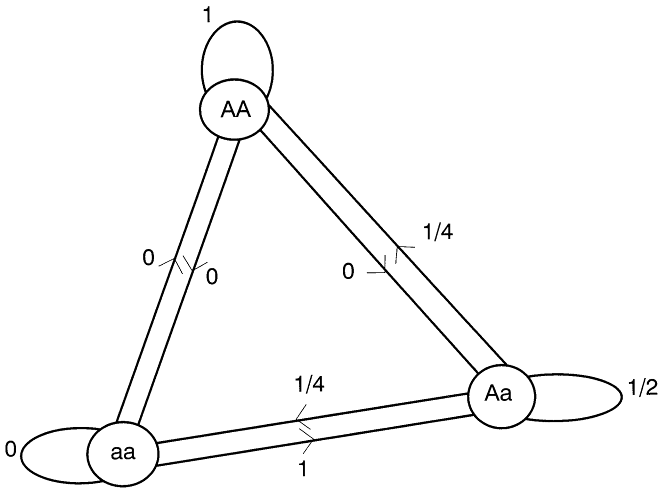


FIGURA 7