UNA METODOLOGÍA PARA POTENCIAR Y ANALIZAR LAS COMPETENCIAS GEOMÉTRICAS Y COMUNICATIVAS

Jesús Murillo y Guillermina Marcos
Departamento de Matemáticas y Ciencias
Universidad de La Rioja

RESUMEN

Establecemos una metodología de trabajo que potencia la competencia geométrica y comunicativa en matemáticas cuando los alumnos desarrollan trabajo colaborativo en un entorno interactivo de aprendizaje. Diseñamos los correspondientes instrumentos de análisis e ilustramos su utilización.

Palabras clave: Aprendizaje de la Geometría, Cabri, atención a la diversidad, TIC, entorno interactivo, competencias matemáticas, educación secundaria, competencia comunicativa.

ABSTRACT

We establish a methodology of work which encourages the geometric and communicative competence in mathematics when students carry out working group in an interactive learning environment. We work out the corresponding tools of analysis and we illustrate their use.

Key words: *learning of geometry, Cabri, diversity, TIC, interactive environment, mathematic competence, secondary education, communicative competence.*

INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA XI
Jesús Murillo y Guillermina Marcos (2007). UNA METODOLOGÍA PARA POTENCIAR Y ANALIZAR LAS COMPETENCIAS GEOMÉTRICAS Y COMUNICATIVAS , pp. 157-170.

0. INTRODUCCIÓN

La situación actual en la que nos encontramos inmersos, la sociedad del conocimiento, supone nuevos métodos de trabajo y de enseñanza, de manera que se facilite una formación integral del estudiante y la adquisición de las competencias necesarias y determinadas por el currículo de matemáticas correspondiente. "*La calidad de un programa de formación viene dada por la relevancia de las competencias que se propone, mientras que su eficacia responde al modo en que éstas se logran en el medio y largo plazo*" (Rico, 2006)".

En este nuevo escenario, se genera en el proceso educativo, una forma de planificar y elaborar actividades y desarrollar proyectos colaborativos utilizando nuevas herramientas que enriquecen el proceso formativo individual a través de una *construcción social* del conocimiento. Establecemos una metodología de trabajo y de análisis que permite potenciar y estudiar la competencia comunicativa en matemáticas y la competencia geométrica, en un entorno interactivo de aprendizaje soportado por medios informáticos y por TIC, en el que el trabajo se organiza de modo colaborativo.

Los cambios que planteamos en la estructura y el funcionamiento de las enseñanzas, deben ser entendidos como instrumentos necesarios para una mejora de la calidad de la enseñanza y como una adecuación a las exigencias de la sociedad del conocimiento.

La importancia de desarrollar la capacidad de comunicarse matemáticamente y del papel del lenguaje en el aprendizaje de las Matemáticas, se ve reflejado tanto en numerosas investigaciones de Didáctica de las Matemáticas (Godino 2001, Nesher 2000, Niss 1999, Duval 2001), como en las orientaciones curriculares de muchos países, en particular en el RD 1631/2006, que establece los contenidos mínimos para la ESO.

1. EL APRENDIZAJE COMO ACTIVIDAD SOCIAL: EL MODELO DE TRABAJO COLABORATIVO

Siguiendo la línea del constructivismo social, consideramos que si bien el aprendizaje es en principio una actividad individual y personal, ésta no se produce sin las interacciones con los demás. Para que se produzca aprendizaje matemático, se debe favorecer la contextualización y funcionalización de un conocimiento matemático general y formal que ha sido construido en épocas con características sociales, económicas y culturales diferentes a las vividas por los alumnos; en un proceso de construcción histórica en el que el conocimiento se ha ido despersonalizando y descontextualizando, pasando a ser parte de la Ciencia Matemática y, por lo tanto, de la cultura.

Dichas contextualización y funcionalización se propician a través de situaciones que permitan a los alumnos participar activamente de la comprensión del conocimiento; situaciones en las que juega un papel preponderante la interacción social.

El saber se contempla como una construcción social. El conocimiento matemático que se enseña en la institución escolar es exterior y anterior al aprendiz, pero sólo se producirá el aprendizaje en la medida que éste sea capaz de interiorizarlo y dotarlo de significado personal. Aquí radica la importancia de los medios y de los procesos que se pongan en juego para poner a los alumnos en contacto con el saber, posibilitando la deconstrucción del saber existente y su posterior reconstrucción por el sujeto que lo aprehende, y es precisamente aquí, en el proceso de apropiación, donde las interacciones sociales juegan un papel fundamental; puesto que la apropiación colectiva puede preceder a la apropiación individual y los conflictos sociocognitivos pueden acelerar ciertas adquisiciones.

En el trabajo colaborativo (Johnson & Jonson, 1999; Sapon-Shevin & al, 2001), la necesidad de articular y explicar al grupo las ideas propias lleva a que éstas sean más concretas y precisas y a organizar e integrar más el conocimiento. Los momentos de interacción permiten a los alumnos tomar conciencia del grado de dominio adquirido pero también reconocer lo que todavía no logran hacer solos y los medios de los que disponen para alcanzar ese objetivo.

Estos cambios en la estructura y el funcionamiento de la enseñanza, permiten no sólo una mejora en la calidad de la enseñanza sino también una adecuación a las exigencias de la sociedad del conocimiento, a través de formas de planificar y elaborar actividades y desarrollar proyectos educativos utilizando estas herramientas, que enriquecen el proceso individual a través de una *construcción social* del conocimiento (Ernest, 1998).

En el diseño e implementación del entorno de aprendizaje, hemos planteado una metodología de trabajo en la que el alumno participa formalmente y de manera activa en la adquisición del conocimiento y en el desarrollo de competencias. La función del profesor es intentar modular y guiar el proceso. Para describir esta función, emplearemos el concepto de *"andamiaje"*; acuñado por Bruner y colaboradores (1975) y retomado por Vygotsky (1978/79).

El diseño y control de los entornos de aprendizaje debe contribuir a este andamiaje; proporcionando en cada momento más que los aportes necesarios los mínimos necesarios, de manera que se potencia el desarrollo óptimo de los alumnos.

2. METODOLOGÍA

2.1. Metodología de trabajo con los alumnos:

Las clases se desarrollan en un aula de Informática, los ordenadores cuentan con programa Cabri, y acceso a Internet.

Diferenciamos tres fases o etapas que denominamos: *"etapa presencial"*, *"etapa correo electrónico"* y *"etapa foro electrónico"*, que aparecen cronológicamente en el orden en que se han mencionado; no obstante la aparición de una no supone la finalización de la anterior sino que en muchos casos coexisten.

En la primera, *"etapa presencial"*, se trabaja con los alumnos sobre el manejo del entorno interactivo y del software correspondiente, mediante la resolución de problemas geométricos de diversa índole (en cuanto a la complejidad y en cuanto a las temáticas geométricas abordadas). Las actividades, se proponen por escrito y las clases son coordinadas por un *"profesor presencial"* que acompaña a los alumnos en el aula.

En la segunda, *"etapa correo electrónico"*, se incorpora a las clases, una nueva figura, la del *"profesor virtual"*, y con él una dinámica de trabajo diferente y la necesidad de manejar no sólo Cabri como parte del entorno de aprendizaje y la Geometría como tema, sino también una manera de comunicación e interacción diferente.

En la tercera, *"etapa foro electrónico"*, la dinámica vuelve a cambiar y las interacciones vuelven a incrementarse dado que las actividades se plantean a través de un foro en el que participan alumnos y profesor.

En estas dos últimas etapas, los intercambios están mediados exclusivamente por las TIC; se producen a través del correo electrónico, del foro y de la página Web del Proyecto; lo que supone aprender a utilizar esta nueva herramienta para comunicarse. Esta modalidad de comunicación alumno- profesor y alumno- alumno, incluye tanto las actividades como sus resoluciones, las consultas de dudas o solicitudes de ayudas, las réplicas y contrarréplicas e incluso los comentarios personales.

En el texto de las actividades propuestas, se establece un sistema de *"ayudas progresivas y diversificaciones"* -atender a la diversidad no consiste en fijar un nivel medio para desarrollar en el curso sino en plantear un entorno que permita, estratégicamente, que cada alumno desarrolle al máximo sus potencialidades, que cada uno evolucione a partir de su nivel inicial, optimizando su aprendizaje; pero todo esto sin perder cierta uniformidad en las temáticas desarrolladas por cada alumno-. Aparece así la idea de *"itinerario de resolución"*.

"Todos los alumnos, independientemente de sus características y circunstancias personales, deben tener oportunidades para estudiar matemáticas y apoyo para aprenderlas. La igualdad no significa que todos deban recibir idéntica instrucción; por el contrario, exige que se hagan adaptaciones razonables y apropiadas para proporcionar la posibilidad a todos los estudiantes de obtener logros." (NCTM, 2000).

En el sistema diseñado, todos los alumnos parten de un mismo enunciado, planteado para poner en juego ciertos conceptos y destrezas y que tiende a desarrollar ciertas competencias; pero dicho enunciado inicial se irá adaptando a cada resolutor.

Las *"ayudas progresivas"* son orientaciones docentes que se administran gradualmente cuando el enunciado inicial no es asequible para el alumno y pretenden convertir dicho enunciado en uno abordable de tal manera que el alumno sea capaz de resolver la actividad. Una ayuda puede consistir, según el caso, en recordar una definición, realizar una sugerencia, proponer un procedimiento, formular una nueva pregunta, reformular la pregunta inicial, aportar un dibujo, etc. Estas ayudas se van aportando gradualmente porque, como hemos mencionado, pretendemos que sean las necesarias pero también las suficientes para resolver el problema. La cantidad y el tipo de ayudas, así como el momento en que se aportan, dependen de cada alumno y cada actividad.

A través de las *"diversificaciones"* de la actividad inicial, el profesor propone a cada alumno diferentes niveles de profundidad, complejidad y formalización. Las diversificaciones se proponen una vez que la actividad propuesta inicialmente, ya ha sido resuelta correctamente por el alumno. Una diversificación puede consistir en la generalización de resultados, en la demostración de la propiedad involucrada en la resolución, en el análisis de otros casos, en la expresión simbólica de algún resultado, etc. Al igual que las ayudas, las diversificaciones también se van incorporando gradualmente y la cantidad, tipo y momento en que se aportan, dependen de cada alumno.

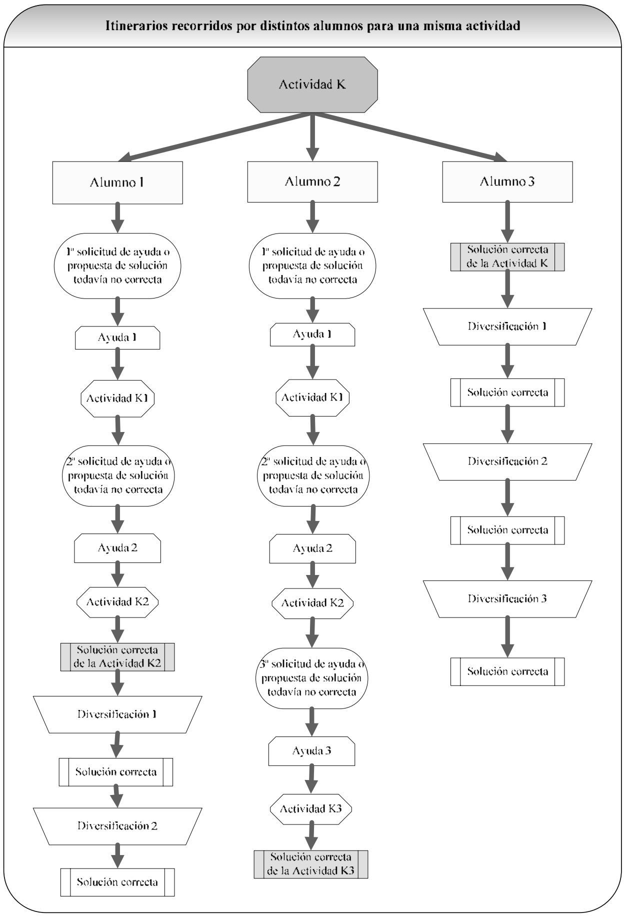
Con este sistema de *"ayudas progresivas y diversificaciones"*, cada alumno, sigue su propio *itinerario de resolución*; todos cumplen con las expectativas básicas propuestas para una actividad que se vuelve asequible a cada resolutor pero también, cada alumno desarrolla al máximo sus potencialidades respecto a ella. Existe un recorrido mínimo realizado por todos, cumpliendo así con las pautas curriculares mínimas planteadas, pero también damos una respuesta a la atención a la diversidad, de manera tal que se permite a cada uno alcanzar el nivel de profundización y formalización más conveniente.

Logramos de esta manera que, en cada momento, todos los alumnos estén trabajando sobre la misma actividad (sobre los mismos contenidos), y evitamos así que los que terminan más rápido avancen hacia otras actividades o tengan que esperar equiparando sus tiempos al de los que trabajan un poco más lento, tiempo que también pretendemos respetar.

Llamamos *"itinerario de resolución"* a la secuencia recorrida por un alumno en la resolución de una actividad dada, teniendo en cuenta las ayudas que fueron necesarias y las diversificaciones que fueron posibles en cada caso.

Así, si bien el enunciado inicial de las actividades se corresponde en principio con el de *"problemas abiertos"*, como dichos enunciados se van adaptando a las necesidades cognitivas de cada alumno a través del sistema de ayudas progresivas y diversificaciones, puede resultar que, según el itinerario de resolución recorrido, una misma actividad termine convirtiéndose en *"problema de aplicación"* o en *"ejercicio algorítmico"* para distintos alumnos (Alsina & al, 1997).

El siguiente esquema, ejemplifica algunos de los distintos itinerarios posibles recorridos por diferentes alumnos en el proceso de resolución de una actividad dada:



Consideramos importante distinguir con cuántas ayudas y de qué tipo resolvió la actividad cada alumno, porque dicha información da cuenta del tipo de problema resuelto; en el caso del ejemplo el "Alumno 1" ha resuelto un "problema de aplicación", el "Alumno 2" ha resuelto un "ejercicio algorítmico" y el "Alumno 3" un "problema abierto".

Resulta claro entonces que el análisis del itinerario de resolución recorrido por el alumno, aporta una información muy relevante para el estudio del proceso de Aprendizaje de la Geometría, estableciendo qué tipo de actividad ha resultado cada enunciado en cada caso, y evaluar la evolución de cada alumno a lo largo del proceso.

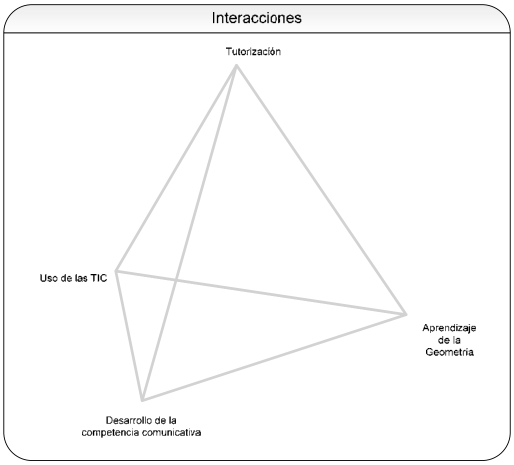
2.1.1. Criterios utilizados para la organización de las secuencias de actividades

Las actividades, cumplen ciertas condiciones, para adaptarse a cada una de las tres etapas del proceso y sus correspondientes modalidades comunicativas y para responder al sistema de ayudas progresivas y diversificaciones que hemos propuesto para atender a la diversidad de manera que cada alumno pueda recorrer el *"itinerario de resolución"* más conveniente. Además, hemos asumido ciertos criterios relacionados con el orden en que éstas se presentan, la manera en que se seleccionan a la hora de construir una secuencia didáctica: Las actividades que forman parte de cada una de las secuencias propuestas a los alumnos guardan un orden que respeta criterios de complejidad creciente y resulta acorde a los contenidos y objetivos que se pretenden desarrollar, pero entre unas y otras, se intercalan otras actividades que involucran otros conceptos y procedimientos geométricos; es decir las actividades seleccionadas para el desarrollo y estudio de un núcleo temático no se presentan de manera consecutiva. La razón de esta "*decisión didáctica"* radica en el hecho sabido de que los alumnos *"aprenden"* durante su escolaridad a tipificar las actividades, tendiendo a aplicar los conceptos recién aprendidos a la resolución de las actividades que se proponen a continuación; y de la misma manera a identificar en una secuencia de problemas correlativos los contenidos y procedimientos involucrados en su resolución. Queremos evitar que casi antes de leer una serie de problemas, o con la resolución del primero de ellos, los alumnos puedan realizar afirmaciones del tipo *"estos se hacen con mediatriz"*, *"estos son de Pitágoras"*; porque consideramos que parte de la competencia matemática se relaciona no sólo con disponer de los conceptos y procedimientos necesarios para resolver una situación, sino también, con la capacidad para seleccionar, adaptar y aplicar dichos conceptos y destrezas en contextos escolares y no escolares. Por tal razón, tanto al organizar el proceso de enseñanza y aprendizaje como el análisis correspondiente del mismo, se han tenido en cuenta estas consideraciones.

2.2. Metodología para la investigación:

2.2.1. Análisis de los aprendizajes de los alumnos

Los beneficios producidos en los alumnos a lo largo del taller, los recogemos en un sistema de tres dimensiones: beneficios relativos al aprendizaje de la Geometría (AG), relativos al uso de las TIC y relativos al desarrollo de la capacidad de interacción y comunicación (CC).



El gráfico anterior representa este sistema mediante un tetraedro en cuyos vértices se encuentran cada uno de las dimensiones mencionadas y en el cual se incorpora un cuarto polo que identifica la tutorización (T). Las aristas de este tetraedro representan las interacciones entre los cuatro polos.

Estas dimensiones no se comportan como polos aislados sino como vértices en permanente interacción con los demás, dando lugar a un progreso conjunto y contextualizado en el que las mejoras en cada dimensión se nutren de los progresos de las otras pero a la vez realimentan dicho progreso. En esta comunicación presentamos los aspectos relativos al Aprendizaje de la Geometría.

En base a estas primeras hipótesis, nos hemos propuesto construir instrumentos que nos permitan analizar los progresos de los alumnos en relación al desarrollo de la competencia comunicativa (CC) y al aprendizaje de la Geometría (AG). Pretendemos por un lado analizar los perfiles correspondientes a cada tipo de aprendizaje, pero también establecer correlaciones, si es que existen, entre ellos.

2.2.2. Instrumento para evaluar el Aprendizaje en Geometría (AG)

Hemos tomado como punto de partida, la noción de competencia y una categorización general establecidas por el Proyecto PISA (pensar y razonar, argumentar,…) con sus respectivos indicadores

La categorización anterior funciona como referencia para confeccionar un instrumento aplicable al proceso concreto llevado a cabo en los alumnos en el Taller, para cuyo diseño hemos considerado unas componentes más concretas y a su vez hemos decidido aplicarlas a la evolución en relación a unos determinados conceptos, relaciones y destrezas geométricos.

Para analizar, por ejemplo si el alumno“*¿Es capaz de poner en juego las competencias necesarias para la resolución de una actividad planteada?,* revisamos el análisis del proceso de resolución de problemas realizado por diferentes autores.

Así, encontramos, entre otras, las siguientes propuestas para las fases de resolución de problemas:

POLYA (1982)	**MASON, BURTON Y STACEY (1988)**	**BRANDSFORD Y STEIN (1993)**
Comprender el problema estableciendo cuál es la meta y los datos y condiciones de partida. **Idear un plan de actuación** que permita llegar a la solución conectando los datos con la meta. **Llevar a cabo el plan** ideado previamente. **Mirar atrás** para comprobar el resultado y revisar el procedimiento utilizado.	**Abordaje:** Comprender el problema Concebir un plan **Ataque:** Llevar a cabo el plan **Revisión:** Reflexión sobre el proceso seguido. Revisión del plan	**I**dentificación del problema **D**efinición y representación del problema. **E**xploración de posibles estrategias. **A**ctuación, fundada en una estrategia. **L**ogros. Observación y evaluación de los efectos de nuestras actividades.

Los distintos modelos resultan más o menos adecuados según el tipo de estudio que se esté realizando, las edades de los alumnos, los contenidos matemáticos con los que están trabajando, el tipo de problemas, el entorno en el que se resuelven, las interacciones producidas, etc. Teniendo en cuenta estas variables en el caso concreto de nuestra investigación, identificamos en el proceso de resolución de problemas los siguientes componentes e indicadores:

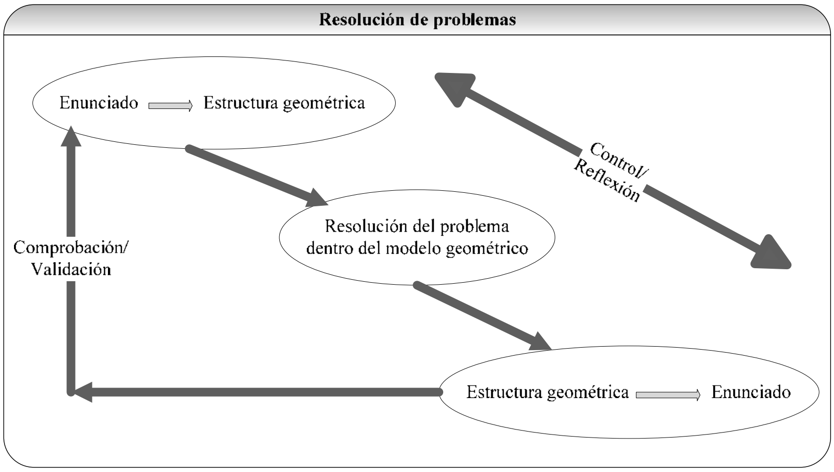
Componente:	**Indicador:**
Transformación 1: modelización del problema	*Fase 1: ¿Es capaz de convertir un enunciado real en un enunciado matemático?(cuando sea necesario)* *Fase 2: ¿Es capaz de traducir el enunciado matemático a una estructura geométrica (respetando la correspondencia entre las condiciones planteadas por el enunciado y su representación geométrica)?*
Transferencia: resolución del problema dentro del modelo	*¿Es capaz de aplicar y adaptar las estrategias necesarias (producción de variaciones, visualización, medición, construcción, cálculo, ...) para resolver el problema?* *¿Es capaz de identificar, seleccionar y aplicar los conceptos y relaciones construidos anteriormente para resolver el problema?*
Metacognición: Reflexión y control sobre el proceso de resolución	*¿Es capaz de controlar el proceso de resolución y reflexionar sobre él?*
Transformación 2: codificación e interpretación de la solución en el contexto del enunciado	*¿Es capaz de comunicar acerca del modelo y de sus resultados dando una solución al problema propuesto?*

Las anteriores capacidades son las componentes fundamentales del proceso de resolución de problemas geométricos, entendido desde la noción de competencia, que llevan a cabo nuestros alumnos al resolver problemas a lo largo del Taller. Dichas capacidades no deben entenderse como componentes aisladas y de sucesión cronológica y lineal (por esa razón, preferimos llamarlas componentes en vez de fases o etapas); dado que los procesos de metacognición hacen posibles las interacciones entre ellas y de esta forma el proceso se hace dinámico y personal en el caso de cada actividad y cada alumno.

Asimismo, entendemos que cada componente incluye ciertas capacidades tales como:

Componente:	**Capacidades:**
Transformación 1: modelización del problema	• Identificar las matemáticas que pueden ser relevantes en el contexto. • Plantear interrogantes. • Representar el problema de una manera diferente. • Comprender la relación entre el lenguaje natural, el lenguaje simbólico y el formal. • Encontrar regularidades, relaciones y patrones. • Reconocer isomorfismos con problemas ya conocidos. • Traducir el problema a un modelo matemático. • Utilizar herramientas y recursos adecuados.
Transferencia: resolución del problema dentro del modelo	• Usar diferentes representaciones. • Usar el lenguaje simbólico, formal y técnico y sus operaciones. • Refinar y ajustar los modelos matemáticos; combinar e integrar modelos. • Argumentar. • Generalizar.
Metacognición: Reflexión y control sobre el proceso de resolución	• Autoreflexionar sobre el proceso y tomar decisiones sobre el mismo. • Conocer las propias limitaciones. • Solicitar ayuda en el momento adecuado y de manera clara y precisa. • Chequear y supervisar la efectividad del plan diseñado para resolver el problema. • Determinar cuando finalizar el trabajo sobre el modelo.
Transformación 2: codificación e interpretación de la solución en el contexto del enunciado	• Entender la extensión y límites de los conceptos matemáticos • Reflexionar sobre los argumentos matemáticos y explicar y justificar los resultados. • Comunicar el proceso y la solución. • Criticar el modelo y sus límites.

Esquematizamos este proceso de la siguiente manera:



La característica de nuestras actividades que se van adaptando a las necesidades cognitivas de cada alumno, hace que cada uno siga su propio *"itinerario de resolución"*. El análisis del *"itinerario de resolución"* recorrido por el alumno, aporta una información muy relevante para el estudio del proceso de Aprendizaje de la Geometría y evaluación de la evolución de cada alumno a lo largo del proceso.

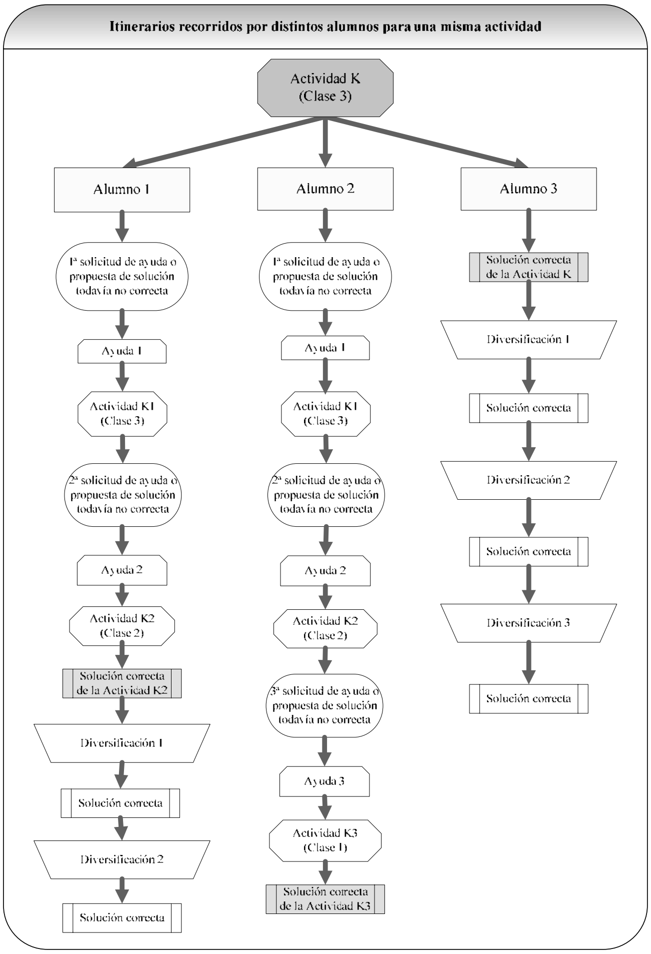
En el informe Pisa (Rico, 2006), se señala: *"Los ítems que se diseñan proponen tres clases de tareas, que se diferencian por el grado de complejidad que requieren en las competencias.* ***Primera clase:*** *Reproducción y procedimientos rutinarios.* ***Segunda clase:*** *Conexiones e integración para resolver problemas estandarizados.* ***Tercera clase:*** *Razonamiento, argumentación, intuición y generalización para resolver problemas originales."*

En nuestro caso, estos niveles no se dan necesariamente en actividades distintas, porque cada actividad "se adapta" al nivel de competencia del alumno en cada momento. Así resulta que una misma actividad puede resultar de primera, segunda o tercera clase según el itinerario que el alumno haya realizado para resolverla; es decir, según la cantidad y tipo de ayudas que haya requerido y la cantidad y tipo de diversificaciones en las que haya podido avanzar:

- Las actividades de *Primera clase (Clase 1)* consisten en *ejercicios algorítmicos*: su resolución requiere de la aplicación de algoritmos, es decir de una secuencia de etapas aplicadas en cierto orden a ciertos datos, para obtener un resultado buscado. Involucran por tanto, tareas de *reproducción* y procedimientos rutinarios.
- Las actividades de *Segunda clase (Clase 2)* consisten en *problemas de aplicación*: su resolución implica la aplicación de algoritmos y procedimientos pero requieren además, usar simbólicamente el problema y manipular los símbolos aplicando varios algoritmos; el resolutor debe tomar decisiones, pero las mismas pueden considerarse mínimas frente al grado con que las toma al resolver un problema abierto. Para resolverlas es necesario entonces, realizar las *conexiones* y la integración de conceptos y procedimientos.
- Las actividades de *Tercera clase (Clase 3)* consisten en *problemas de enunciado abierto*: sus enunciados no contienen instrucciones para su resolución, ni tienen explícitamente

una única respuesta ya que ésta dependerá de las decisiones que tome el resolutor. Su resolución involucra tareas de *reflexión*, en las que serán fundamentales el razonamiento, la argumentación, la intuición y la generalización.

Así, por ejemplo, para una misma actividad K (inicialmente de *Clase 3*), podemos tener para distintos alumnos diferentes itinerarios de resolución:



Itinerarios recorridos por distintos alumnos para una misma actividad

- El "Alumno 1", ha necesitado una sola ayuda para resolver la actividad y fue capaz de resolver dos diversificaciones; decimos que resolvió la Actividad K1 y no la Actividad K porque consideramos que al añadir la Ayuda 1 ya no estamos frente a la actividad K sino a una menos compleja que llamamos "Actividad K1".
- El "Alumno 2", ha requerido tres ayudas para logra resolver correctamente una actividad que ya no es la Actividad K sino la Actividad K3, bastante menos compleja que las Actividades Ki (i<3).

- El “Alumno 3” ha sido capaz de resolver la Actividad K a partir de su enunciado original; y pudo avanzar hasta resolver tres diversificaciones correctamente.

Consideramos importante distinguir con cuántas ayudas y de qué tipo resolvió la actividad cada alumno, porque dicha información da cuenta del tipo de actividad resuelta; en el caso del ejemplo probablemente el *“Alumno 1”* haya resuelto un *“problema de aplicación”, el “Alumno 2”* haya resuelto un *“ejercicio algorítmico*” y el *“Alumno 3”* un *“problema abierto”.*

A partir de las todas las consideraciones anteriores, establecemos el correspondiente instrumento de análisis:

Indicador: *¿Convierte el enunciado real en un enunciado matemático? (si es necesario)*
Indicador: *¿Traduce el enunciado matemático en una estructura geométrica (respetando la correspondencia entre las condiciones planteadas por el enunciado y su representación geométrica)?*
Indicador: *¿Identifica, selecciona y aplica los conceptos y relaciones construidos anteriormente, necesarios para resolver el problema?*
Indicador: *¿Aplica y adapta las estrategias necesarias para resolver el problema?*
Indicador: *¿Reflexiona y controla el proceso de resolución?*
Indicador: *¿Comunica acerca del modelo y de sus resultados dando una solución justificada al problema propuesto?*
Indicador: *¿Cuántas diversificaciones resuelve? (¿hasta qué nivel de profundización avanza?).*
Valoración/ ponderación: *Clase de actividad que resuelve el alumno y nivel que le corresponde.*

En base al análisis de cada uno de los indicadores (en los 6 primeros se considera “con ayuda” o “sin ayuda”), se establece un nivel general para el alumno, que representa el estado general del mismo en relación al Aprendizaje de la Geometría:

- **Nivel Uno (N1):** Teniendo en cuenta el análisis del itinerario realizado, el alumno resuelve una *Actividad de Primera clase (Reproducción y procedimientos rutinarios).* Este nivel se caracteriza por un manejo básico de conceptos y procedimientos rutinarios que le permite resolver solamente *“ejercicios algorítmicos”*.

- **Nivel Dos (N2):** Teniendo en cuenta el análisis del itinerario realizado, el alumno resuelve una *Actividad de Segunda clase (Conexiones e integración para resolver problemas estandarizados).* Este nivel se caracteriza por la capacidad de realizar conexiones e integrar conceptos y procedimientos que le permiten resolver *"problemas de aplicación"*.
- **Nivel Tres (N3):** Teniendo en cuenta el análisis del itinerario realizado, el alumno resuelve una *Actividad de Tercera clase (Razonamiento, argumentación, intuición y generalización para resolver problemas originales)*. Este nivel se caracteriza por las capacidades de razonamiento, argumentación, intuición y generalización necesarios para resolver *"problemas abiertos"*

Nota: Dado que el espacio es limitado, no hemos incluir en esta comunicación ejemplos ni de actividades ni de las resoluciones propuestas por los alumnos; aunque sí hemos esquematizado los correspondientes itinerarios de resolución. Se presentarán ejemplos en la presentación de la comunicación.

REFERENCIAS

Alsina, C. , Fortuny, J. M., & al. (1997). *¿Por qué Geometría? Propuestas didácticas para la ESO*. Madrid: Síntesis (pp.71-77).

Bruner, J. (1975). *Early Social Interaction and Language Acquisition.* London: Academic Press.

Canale, M. (1995). De la competencia comunicativa a la pedagogía comunicativa del lenguaje. En Llobera, M. (ed.), *Competencia comunicativa* (pp. 63-82), Madrid: Edelsa.

Duval, R. (2001). La Geometría desde un punto de vista cognitivo, PMME- UNISON.

Ernest, P. (1998). *Social constructivism as a philosopy of mathematics*. New York: SUNY.

Godino; J. (2001), Comparación de herramientas teóricas para el Análisis Cognitivo en Didáctica de las Matemáticas, http://www.ugr.es/~jgodino/indice_eos.htm.

Grice, P. (1991). Las intenciones y el significado del hablante. *La búsqueda del significado*. Madrid: Tecnos.

Johnson, D. & Johnson, R. (1991). *Learning together and alone. Cooperative, competitive and individualisytic learning*. Needham Heights: Allyn and Bacon.

Johnson, D. & Johnson, R. & Holubec, E. (1999). *El aprendizaje cooperativo en el aula*. Barcelona: Paidós.

Llobera, M. (1995). *Competencia comunicativa.* Madrid: Edelsa.

MEC (2006). *Decreto de contenidos mínimos para la ESO.* RD 1631/2006. BOE Nº 5 del 5/1/2007 (pp. 677-773).

Murillo, J. (2001). *Un entorno interactivo de aprendizaje con Cabri-actividades aplicado a la enseñanza de la geometría en la ESO.* Tesis doctoral. UAB.

NCTM (2000). *Principles and Standard for school mathematics*. Traducción de la Sociedad Andaluza de EM Thales (2003), (pp. 11-15)

Nesher, P. (2000). Posibles relaciones entre lenguaje natural y lenguaje matemático. *Matemáticas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional*. España: Graó

Niss, M. (1999). Competencies and Subject Description. En Uddanneise, 9.

OCDE (2003). *The PISA 2003 Assessment Framework. Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills*. París: OCDE.

Rico, L. (2003). Evaluación de competencias matemáticas. Proyecto PISA/OCDE 2003. *Investigación en Educación Matemática, 8º Simposio de la SEIEM*, U. da Coruña, (pp. 89-102).

Rico, L. (2005). La competencia matemática en PISA. En Fundación Santillana (Ed.), *La Enseñanza de las matemáticas y el Informe PISA* (pp. 21-40). Madrid: Editor.

Rico, L. (2006). "Las competencias matemáticas en el informe PISA 2003: el caso de la geometría". En II Escuela de Educación Matemática Miguel de Guzmán: *En torno a la geometría de Miguel de Guzmán*. (pp. 9-12).

Sapon-Shevin, M y otros (2001). *Cooperative learning and inclusion* (Online), recuperable en: www.clcrc.com/pages/overviewpaper.html.

Sfard, A., Nesher, P. & al. (1998). Learning mathematics through conversation: Is it as good as they say? *For the Learning of Mathematics, 18(1)*, (pp. 41-51).

Vygotsky, L.S. (1978). *Mind and society*. Massachusetts: Harvard University Press.

Vygotsky, L.S. (1979). *Los procesos psicológicos superiores*. Barcelona: Grijalbo Grupo Editor.