

LA ENSEÑANZA DEL ÁLGEBRA LINEAL UTILIZANDO MODELIZACIÓN Y CALCULADORA GRÁFICA: UN ESTUDIO CON PROFESORES EN FORMACIÓN

José Ortíz, Luis Rico y Enrique Castro

Exploramos el conocimiento didáctico desarrollado por diez futuros profesores de matemáticas de secundaria que participaron en un programa de formación que integra, a través del álgebra lineal, el uso de la calculadora gráfica y la modelización matemática. Utilizamos una aproximación cualitativa. El análisis de las actividades de enseñanza diseñadas por los participantes que involucran la calculadora gráfica y la modelización muestra cambios y progreso en su conocimiento didáctico.

Términos clave: Álgebra lineal; Calculadora gráfica; Conocimiento didáctico; Formación de profesores; Modelización

Using Modelling and Graphic Calculators in the Teaching of Linear Algebra: A Study in a Teacher Training Program

We explored the didactical knowledge developed by ten secondary mathematics teachers who participated in a training program that involved the graphing calculator and modeling on linear algebra topics. We used a qualitative approach. The analysis of the algebra teaching activities designed by the participants involving the graphing calculator and modeling shows changes and progress in their didactical knowledge.

Keywords: Didactical knowledge; Graphic calculator; Linear algebra; Modeling; Teacher training

El desarrollo de esta investigación persigue analizar el conocimiento didáctico derivado de la implementación de un programa de formación que integra, a través del álgebra lineal, el uso de la calculadora gráfica y la modelización en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. A efecto del análisis curricular, se partió de una estructura teórica fundamentada en las cuatro dimensiones siguientes: conceptual, cognitiva, formativa y social (Rico, 1997a,

Ortiz, J., Rico, L. y Castro, E. (2008). La enseñanza del álgebra lineal utilizando modelización y calculadora gráfica: un estudio con profesores en formación. *PNA*, 2(4), 181-189.

1997b). Por otra parte, dicha teoría considera que el conocimiento didáctico de los temas matemáticos debe fundamentarse en los sistemas de representación (Duval, 1995; Janvier, 1987), la modelización (Bloom, Booker, Huntley y Galbraith, 1998; Niss, Blum y Huntley, 1991; Ortiz, 2002), los errores y dificultades (Borassi, 1987), la fenomenología (Freudenthal, 1983), la historia de las matemáticas (Fauvel, 1991) y los materiales y recursos. Este estudio se llevó a cabo en el contexto de la Universidad de Granada, España, dentro de los planes de formación vigentes en el curso 2001-2002.

En esta investigación se ha optado por la utilización de la calculadora gráfica TI-92, la cual se incorpora como recurso didáctico en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. El contenido matemático involucrado fue el álgebra lineal, el cual propicia una riqueza de aplicaciones importantes en la modelización de situaciones del mundo real, tal como lo plantean Brunner, Coskey y Sheehan (1998), Dorier (2000) y Harel (1998), entre otros.

La elección del álgebra lineal se apoya en el currículo diseñado por la Consejería de Educación de la Junta de Andalucía (1992). Ese documento establece que, en el núcleo de Álgebra para la Educación Secundaria Obligatoria, se debe contemplar la resolución de ecuaciones lineales y sistemas de dos ecuaciones mediante métodos diversos. Asimismo, se deben considerar aplicaciones de métodos algebraicos en la resolución de problemas matemáticos y de la vida real. Dentro de la diversidad de situaciones que se resuelven con tratamiento algebraico, se destaca la importancia de aquellas cuya formulación implica la búsqueda de uno o dos datos.

La pertinencia de la investigación procede del programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria en la Universidad de Granada, tomando en consideración que en la actualidad en dicho programa se aprecia escaso tratamiento de las nuevas tecnologías y de la modelización matemática. Para realizar el estudio se implementó un programa que integra la modelización, la calculadora gráfica y el álgebra lineal en la elaboración de actividades didácticas.

Las cuestiones de investigación formuladas fueron las siguientes:

- ◆ ¿Qué conocimiento didáctico desarrollan los profesores en formación mediante el manejo e incorporación de la calculadora gráfica en tareas escolares, y de qué manera lo integran en su conocimiento profesional?
- ◆ ¿Cuáles son los criterios que manejan los profesores en formación para el uso de la modelización matemática y de qué manera recurren a ella?
- ◆ ¿Qué potencialidades didácticas brinda el álgebra lineal, en la formación inicial del profesor, para el establecimiento de vínculos y relaciones entre la calculadora y la modelización matemática?

METODOLOGÍA

El estudio se desarrolló con diez sujetos que siguieron durante 30 horas (diez sesiones) la implementación de un programa de formación, mediante un curso-taller, cuyo diseño se sustentaba sobre la modelización y la calculadora gráfica como recurso en un contexto matemático de álgebra lineal. Los sujetos del estudio fueron profesores de matemáticas en formación que participaron de forma voluntaria. Se seleccionaron con base en criterios de ser potencial profesor de matemáticas y no estar en ejercicio docente.

Este trabajo se enmarca dentro de la metodología de estudio de caso. El foco de la investigación se centra en las producciones de los sujetos participantes en la implementación del programa.

En el estudio se consideran las producciones de los participantes en relación con: (a) el uso de la calculadora gráfica y la modelización en la enseñanza del álgebra lineal, (b) el manejo instrumental de la calculadora gráfica y su articulación con la modelización, y (c) el empleo de estos elementos para planificar tareas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Es decir, el estudio se centra en estos aspectos del conocimiento didáctico del profesor en formación.

El análisis de las producciones se efectuó tomando como criterio la identificación de tres momentos claves en el desarrollo del curso-taller: (a) la primera sesión (momento inicial), (b) la cuarta sesión (momento intermedio) y (c) la décima sesión (momento final). Todo ello contrastado con las producciones de las demás sesiones del curso-taller.

Se consideraron diferentes aspectos para el análisis. Con respecto a la modelización, se identificó el desarrollo de habilidades para resolver problemas abiertos, la discusión y reflexión sobre los abordajes de las situaciones problema, la valoración crítica de cada parte de la actividad desarrollada, las habilidades de comunicación oral y escrita y las habilidades para trabajar en grupo, aspectos sugeridos por Galbraith, Haines e Izard (1998). Con respecto al apoyo de la calculadora gráfica como recurso didáctico, se analizó la utilización de los diversos sistemas de representación y sus conexiones entre ellos, con los conceptos matemáticos y con las situaciones planteadas en el diseño de actividades didácticas. También se tomó en cuenta el aprovechamiento de las posibilidades de cálculo, experimentación, visualización y contraste de resultados posibles de efectuar con el uso de la calculadora gráfica, de acuerdo a lo planteado por Kutzler (2000).

RESULTADOS

Presentamos los resultados del estudio describiendo el estado de los profesores en formación en el momento inicial, en el momento intermedio y en el momento final.

Estado de los Profesores en Formación en el Momento Inicial

El estado inicial de los futuros profesores se puede sintetizar en los siguientes aspectos generales. Los participantes:

- ◆ poseen una sólida formación disciplinar;
- ◆ están abiertos al empleo de la calculadora gráfica por parte del profesor de matemáticas, aunque mantienen una posición moderada sobre el uso de la misma por parte de los alumnos;
- ◆ tienen relativa habilidad para proponer situaciones del entorno del alumno;
- ◆ conservan el esquema de conducción de la clase dominada por el profesor;
- y
- ◆ manifiestan poca iniciativa al momento de proponer actividades de evaluación.

Estado de los Profesores en Formación en el Momento Intermedio

El objetivo de la cuarta sesión fue modelizar situaciones en las cuales subyacen relaciones de linealidad que conllevan a la resolución de inecuaciones lineales. Una de las situaciones problema propuestas en esta sesión fue la siguiente, relacionada con el ingreso laboral:

Ricardo tiene dos trabajos de tiempo parcial; en uno le pagan 7 euros por hora y en el otro 5 euros por hora. Debe ganar, cuando menos, 140 euros semanales para sufragar sus gastos escolares. Determinar las diversas formas en que puede programar el tiempo para alcanzar su meta.

Resolución Directa sin Usar Calculadora Gráfica

En este caso los profesores en formación identificados como PF4 y PF7 resolvieron el problema con pocos detalles. El participante PF4 consideró las variables x e y que denotan el número de horas en el trabajo que paga 7€ la hora y el número de horas en el trabajo que paga 5€ la hora, respectivamente. Luego definió las funciones T_1 y T_2 por $T_1(x) = 7x$ y $T_2(y) = 5y$ y formuló el modelo de la situación planteada definido por la desigualdad $T_1(x) + T_2(y) \geq 140$. No se observó la consideración de condiciones o restricciones en la construcción del modelo. Tampoco se explicaron los detalles y la necesidad de introducir las funciones lineales T_1 y T_2 . Finalmente no se resolvió el problema, sino que se planteó la desigualdad $y > \frac{-7(x-20)}{5}$ y se afirmó tener “siempre partes del semiplano superior”. Obviamente no se vislumbró una clarificación de los procedimientos señalados. Se podría decir que el diseño de la actividad no se estructuró para ser comprendido por alumnos de secundaria.

Resolución Directa Utilizando Calculadora Gráfica

En este caso tenemos el uso de la calculadora gráfica pero sin introducción previa a la visualización de la misma. Es decir, se dejó que la calculadora gráfica “explicara” por sí misma. No se hizo interpretación ni se apreció su incorporación al proceso de modelización. Un ejemplo de este caso lo representan las producciones de los participantes PF5 y PF9. PF5 planteó las inecuaciones $140 < 7x + 5y$ y $x + y < 40$, definió las funciones $y = \frac{140 - 7x}{5} \equiv y3(x)$ y $y = 40 - x \equiv y4(x)$, y finalmente hizo la representación (Figura 1), sin dar detalles ni interpretaciones respecto a la situación problema.

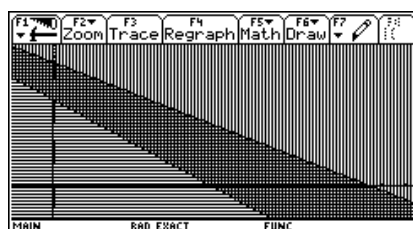


Figura 1. Representación propuesta por PF5

El participante PF9 definió la función ingreso de Ricardo como $i(t_1, t_2) = 7t_1 + 5t_2$ donde t_1 es el tiempo en el trabajo 1 y t_2 el tiempo en el trabajo 2. Luego escribió y presentó $i(t_1, t_2) \geq 140$ y en la calculadora hizo la representación mostrada en la Figura 2.

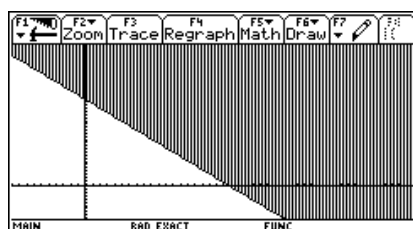


Figura 2. Representación propuesta por PF9

En esta última producción se notó dominio técnico de la calculadora gráfica en la graficación de funciones, pero no se aprovechó para sacar conclusiones acerca de las soluciones, lo cual pudo haber conducido a tomar en cuenta nuevas condiciones y el ajuste del modelo.

Resolución Detallada Utilizando Calculadora Gráfica

En este caso, los profesores en formación intentaron explicar los detalles de sus razonamientos. Además, incorporaron la calculadora gráfica en sus producciones y abordaron el proceso de modelización. Utilizaron la calculadora gráfica para despejar variables, tal como se observa en la Figura 3. También emplearon la calculadora gráfica para realizar tablas como la mostrada en la Figura 4, cons-

truida con la función $y(x) = \frac{-7(x-20)}{5}$. En el contexto algebraico definieron las variables a utilizar en la construcción del modelo, introdujeron ecuaciones e inecuaciones en dos variables y la interpretación de sus soluciones. Respecto del estudio de la situación problema se encontró que la mayoría de participantes en esta categoría resolvieron casos particulares.

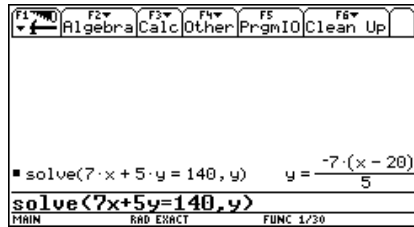


Figura 3. Despeje de variables

x	y1	y2	y3
1.	26.6		
2.	25.2		
3.	23.8		
4.	22.4		
5.	21.		
6.	19.6		
7.	18.2		
8.	16.8		

Figura 4. Presentación de tablas

Estado de los Profesores en Formación en el Momento Final

El objetivo de la última sesión fue diseñar una actividad didáctica de contenido algebraico para desarrollarla con alumnos de secundaria, según se muestra a continuación:

Supongamos un profesor de secundaria que necesita elaborar una actividad didáctica con la que mostrar la utilidad de los sistemas de ecuaciones lineales. Para satisfacer este propósito te pedimos que

1. describas (o propongas) una situación problema del mundo real que cumpla esa asignación.

Suponiendo que el profesor conoce el proceso de modelización y que utilizará la calculadora gráfica con sus estudiantes:

2. enuncies al menos dos preguntas, cuya respuesta requiera el uso de la modelización y la calculadora gráfica;

3. ordenes la secuencia de las actividades (guión) a seguir por el profesor, para lograr su objetivo; y

4. sugieras al menos dos aspectos a evaluar (en los alumnos) e indica cómo los llevarías a cabo.

Es importante destacar que el enunciado de esta actividad fue idéntico al propuesto en la parte B de la sesión inicial.

En la primera cuestión, los profesores en formación plantearon situaciones de la vida cotidiana, familiar, empresarial, comercial y del ámbito bélico. En general, los profesores en formación acudieron a diferentes ámbitos de interés para plantear las situaciones problema.

En cuanto a la segunda cuestión, las preguntas expuestas por los participantes podrían contribuir a desarrollar procesos de modelización donde se desarrollaran habilidades de comunicación oral y escrita, así como la criticidad e independencia de pensamiento de los alumnos.

Respecto a la tercera cuestión, los profesores en formación consideraron la secuencia siguiente: (a) organización de los alumnos en grupos pequeños, (b) planteamiento de la situación problema, (c) formulación (y selección) del problema, (d) identificación de variables, (e) establecimiento de relaciones entre las variables —puede utilizarse la calculadora gráfica—, (f) construcción del modelo, (g) representación del modelo utilizando varios sistemas de representación —con el apoyo de la calculadora gráfica—, (h) resolución del problema (matemático), (i) interpretación de la (o las) solución (o soluciones), (j) formulación de nuevas preguntas y (k) planteamiento de nuevas situaciones a manera de ejemplo.

Las propuestas de la cuarta cuestión, referida a la evaluación, sugieren que los profesores en formación consideraron la evaluación como búsqueda de información para el profesor, para que éste último lograra construir un marco general de sus alumnos y tomara decisiones en relación con las estrategias de enseñanza y el aprendizaje. No se consideró explícitamente la evaluación como fuente para contribuir a fortalecer en los alumnos sus capacidades intelectuales y aprovechar las posibles ventajas que le ofrece el contexto escolar.

LOGROS Y HALLAZGOS

Los profesores en formación plantearon situaciones del mundo real ajustadas a los niveles de educación secundaria y cercanas al entorno del alumno. En cuanto a los materiales y recursos, se evidenció un dominio en el manejo técnico y didáctico de la calculadora gráfica y de las opciones que ésta ofrece, otorgándole importancia tanto para el profesor como para el alumno. Se reveló una postura ante la enseñanza de las matemáticas que colocaba al alumno en un plano de sujeto activo, donde éste podría experimentar, conjeturar, formular, resolver, explicar, predecir y contrastar con los demás compañeros y con el profesor. Los profesores en formación recurrieron a diferentes sistemas de representación y sus interconexiones, lo cual reveló la búsqueda de alternativas para facilitar la comprensión en los alumnos. Exploraron formas de explicar el álgebra a los alumnos como mecanismos para favorecer la comprensión de la situación problema. Se puso en evidencia la aplicación del proceso de modelización, integrado a la calculadora gráfica, en todas sus fases para el diseño de la actividad didáctica de contenido algebraico solicitada, destacándose el énfasis que mantuvieron en el uso de preguntas abiertas.

Las producciones de los participantes estuvieron referidas a: (a) la aplicación sistemática de la modelización en la resolución de problemas del mundo real, (b)

el uso de la experimentación para la resolución de problemas, (c) la utilización de la calculadora gráfica en los momentos de abstracción y resolución correspondientes al proceso de modelización y (d) la utilización de las potencialidades de la calculadora gráfica con fines didácticos.

Respecto a la modelización, los profesores en formación propusieron problemas abiertos con el propósito de contribuir al desarrollo de la autonomía intelectual de los alumnos.

Por otra parte, respecto a la secuencia, en el momento inicial sólo se hizo énfasis en plantear la situación problema, formular el modelo, resolver y plantear otros ejemplos similares y comprobar resultados con la calculadora gráfica. En el momento final se consideró el trabajo en grupo por parte de los alumnos, el planteamiento de situaciones y la selección y formulación de problemas, la construcción y representación múltiple del modelo (con el apoyo de la calculadora gráfica), la interpretación de las soluciones y la formulación de nuevas preguntas. Esto revela avances en el conocimiento didáctico de los profesores en formación generados en la implementación del programa.

En lo relativo a la importancia del álgebra lineal para la enseñanza, los profesores en formación plantearon contextos que permitieron utilizar los conceptos algebraicos para la aplicación de la modelización y el reconocimiento de diferentes formas de enseñanza.

REFERENCIAS

- Bloom, W., Booker, G., Huntley, I. y Galbraith, P. (Eds.). (1998). *Teaching and learning mathematical modelling*. Chichester: Horwood.
- Borassi, R. (1987). Exploring mathematics through the analysis of errors. *For the Learning of Mathematics*, 7(3), 2-9.
- Brunner, A., Coskey, K. y Sheehan, S. (1998). Algebra and technology. En L. J. Morrow y M. J. Kenney (Eds.), *The teaching and learning of algorithms in school mathematics* (pp. 230-238). Reston: NCTM.
- Consejería de Educación de la Junta de Andalucía (1992). *Boletín oficial N° 56* (anexo II), Junio, 20. Sevilla: autor.
- Dorier, J. (Ed.) (2000). *On the teaching of linear algebra*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Duval, R. (1995). *Semiosis et pensée humaine*. Paris: Peter Lang.
- Fauvel, J. (Ed.) (1991). Special issue on history in Mathematics Education. *For the Learning of Mathematics*, 11 (2).
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Galbraith, P., Haines, C. e Izard, J. (1998). How do students' attitudes to mathematics influence the modelling activity? En W. Bloom, G. Booker, I. Huntley

- y P. Galbraith (Eds.), *Mathematical modelling. Teaching and assessment in a technology-rich world* (pp. 265-278). Chichester: Horwood.
- Harel, G. (1998). Two dual assertions: The first on learning and the second on teaching (or vice versa). *The American Mathematical Monthly*, 105(6), 497-507.
- Janvier, C. (Ed.) (1987). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.
- Kutzler, B. (2000). The algebraic calculator as a pedagogical tool for teaching mathematics. *The International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education*, 7(1), 5-24.
- Niss, M., Blum, W. y Huntley, I. (1991). *Teaching and mathematical modeling and applications*. Chichester: Horwood.
- Ortiz, J. (2002). *Modelización y calculadora gráfica en la enseñanza del Álgebra. Estudio evaluativo de un programa de formación*. Tesis doctoral, Universidad de Granada.
- Rico, L. (1997a). Los organizadores del currículo de matemáticas. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 39-59). Barcelona: Horsori.
- Rico, L. (1997b). Dimensiones y componentes de la noción de currículo. En L. Rico (Ed.), *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria* (pp. 377-414). Madrid: Síntesis.

Este documento se publicó originalmente como Ortiz, J., Rico, L. y Castro, E. (2004). La enseñanza del álgebra lineal utilizando modelización y calculadora gráfica. Un estudio con profesores en formación. En E. Castro y E. de la Torre (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Octavo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)* (pp. 273-282). A Coruña: Universidade da Coruña.

José Ortiz
Universidad de Carabobo
ortizjo@cantv.net

Luis Rico
Universidad de Granada
lrico@ugr.es

Enrique Castro
Universidad de Granada
ecastro@ugr.es