IMÁGENES DEL CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA

Pilar Turégano

Pilar Turégano, E.U. Magisterio
Plaza Universidad, 3 • 02071 Albacete
e-mail: pilar.turegano@uclm.es

RESUMEN

En este artículo se presenta el desarrollo y resultados más relevantes de diversas etapas de investigación que sirvieron para la elaboración de una tesis doctoral en Educación Matemática dirigida por el Dr. Eugenio Filloy. El primer objetivo era obtener un modelo teórico dentro del contexto matemático que pudiera utilizarse para la elaboración de una propuesta didáctica para presentar el concepto de integral definida a los estudiantes que van a ser iniciados en el cálculo infinitesimal. Posteriormente, se sometió a evaluación la propuesta y se identificaron las imágenes del concepto de integral creadas en los estudiantes.

ABSTRACT

In this paper are presented the development and most relevant results of different research stages which were used for the elaboration of a doctoral thesis on Mathematical Education directed by Dr Eugenio Filloy. The prime aim was to achieve a theoretical model within the mathematical context which could be used for the elaboration of a didactical proposal to introduce the concept of definite integral to students who have not yet been initiated in the study of infinitesimal calculus. Later the proposal was submitted to evaluation, the concept images of integral formed in the minds of the students were identified.

1. El origen del problema

El trabajo que presentamos tiene su origen en la reflexión que hicimos, en un momento determinado de nuestra práctica educativa, acerca del fracaso de nuestros alumnos en la comprensión de los conceptos de cálculo, en general, y de la integral definida, en particular, objeto en el que vamos a centrar nuestra investigación.

Esa reflexión nos permitió darnos cuenta de que, hasta que no tienen dieciséis años, aproximadamente, los estudiantes no oyen ni siquiera hablar del infinito, de los límites, etc. La enseñanza del cálculo no pasa por una fase previa de carácter experimental. El resultado es que, a partir de ese momento, los estudiantes deben asimilar, al mismo tiempo, los fenómenos asociados a las apariciones del infinito y de los límites y los conceptos y teorías formales que los expresan y desarrollan matemáticamente. Interviene ahí una teoría que no tiene como función ordenar un conjunto rico en experiencias previas, simplemente porque tal conjunto no existe. Freudenthal (1973) ha puesto en evidencia las **dificultades** que resultan de este estado de cosas.

A partir de esta reflexión, recurrimos a un exhaustivo análisis de la bibliografía sobre las investigaciones llevadas a cabo en este campo, y constatamos que los estudiantes no tienen un rendimiento aceptable en los cursos de cálculo, ni siquiera en la universidad. Las causas que explican esta realidad las encontramos en el terreno epistemológico (Sierpinska, 1985a y b, 1987a y b, 1989), en el terreno didáctico (Orton 1979, 1983a y b) y en el terreno psicológico (Tall y Vinner, 1981).

Respecto al concepto de integral, existen estudios cuyas conclusiones hablan por sí mismas de la necesidad de un cambio:

- El punto de vista que, a menudo, es “impuesto” al estudiante de Instituto y de Universidad es el de la integral de Riemann, en la que el área ya no es definida como un objeto geométrico, sino como el resultado de un cálculo según un procedimiento dado. ¿Por qué no pensamos en la dificultad que puede suponer para el estudiante el relacionar el área con el proceso de sumación que permite sumar infinitas cantidades “infinitamente pequeñas”? Y, aunque sea una forma de razonar muy sugestiva y útil, frecuentemente, desde el punto de vista lógico, adolece del defecto de no poder atribuir un significado exacto al concepto de “cantidad infinitamente pequeña” (Schneider-Gilot, 1988).

- Por otra parte, “parece que referirse a la integral como límite de una suma no responde a la lógica de los infinitésimos” (Cordero, (1987).
- Orton (1983a), en su estudio sobre la comprensión que el estudiante tiene de la integración, concluye que los 4 ítems que trataban sobre la comprensión de la integración como límite de una suma constituyen el obstáculo principal.
- ¿Por qué no pensamos también en la dificultad de las tres magnitudes que hay presentes cuando definimos la integral de Riemann: los rectángulos, los segmentos a los que se reducen y el área curvilínea a determinar?

  Se sabe, después de los estudios experimentales llevados a cabo por los psicólogos de la forma, que la percepción de un objeto no es reductible a la imagen que de éste se forma en la retina. La imagen es unívoca, pero la percepción puede desdoblarse. La percepción de un objeto no es la yuxtaposición pura y simple de las percepciones de sus partes; es una construcción mental compleja de la que pueden estudiarse ciertos determinantes. Cuando decimos a los estudiantes, por ejemplo, que los rectángulos se reducen a segmentos, estamos hablando de una manera sugerente de cómo se pintan las imágenes mentales de los estudiantes, no lo que se imprime realmente en sus retinas.

2. Enfoque y antecedentes de la investigación

Como ocurre con todo hecho didáctico, éste se presta a múltiples interpretaciones. Los psicólogos, pedagogos, padres, estudiantes, profesores... darían sus explicaciones, todas ellas, *a priori*, dignas de interés. Pero ninguna de esas razones, considerada aisladamente, es suficiente para dar cuenta de la totalidad del fenómeno. Esto no impide que toda investigación presuponga la elección de un punto de vista particular, forzosamente reductor, pero que permita cuestionar eficazmente la compleja "realidad" por la elección de uno u otro de sus aspectos. En las ciencias llamadas clásicas, esta selección viene determinada por el **paradigma** en curso en cada una de esas disciplinas, que, en una época dada, constituye el objeto de un consenso en el seno de una comunidad científica reconocida como tal (Kuhn, 1962).

Pero, ¿**se puede hablar de paradigmas en las ciencias humanas**? En concreto, por lo que concierne a la educación matemática, el objeto de esta disciplina se encuentra en la encrucijada de muchas otras disciplinas: sociología, psicología, antropología, pedagogía, epistemología y matemáticas (Gutiérrez, 1991), y suscita todavía en el momento actual múltiples debates.

Por todo ello, podemos hablar de diversas perspectivas bajo las cuales se lleva a cabo la investigación en educación matemática, y, así, cabe citar, siguiendo a Shulman (1986), los dos polos extremos:

- enfoque **positivista**, que trata de encontrar leyes y confirmar hipótesis, especialmente acerca de las conductas y procedimientos que se asocian con mejoras en el rendimiento de los estudiantes;
- enfoque **interpretativo**, orientado a la búsqueda del significado personal de los sucesos, el estudio de las interacciones entre las personas y el entorno, así como los pensamientos, actitudes y percepción de los participantes.

El primero utiliza métodos cuantitativos, y el segundo está asociado con el estudio de casos, la etnografía y los informes de tipo narrativo (Erickson, 1986). Además, nos parece adecuado hablar de una tercera perspectiva:

- enfoque **socio-crítico**, partidario de conectar la investigación con la práctica: no es suficiente penetrar en una clase y observar el encuentro educacional; se precisa, también, guiar directamente la práctica, por lo que se necesita una mayor colaboración entre el profesor y el investigador.

> ... parece que algo no funciona teniendo a un grupo decidiendo qué hacer, y otro, haciéndolo. (Kilpatrick, 1988)

Ello puede llevar, a veces, a la necesidad de que dicho profesor sea uno de los miembros del equipo de investigación, como ocurre, por ejemplo, con Heid (1988), Zawojewski (1986) y Johnson (1986), entre otros, que actúan a la vez como profesores e investigadores en sus respectivos estudios.

No se descarta la integración de los diversos enfoques (o de rasgos de alguno o algunos de ellos) para un mismo programa de investigación. Lo que sí es preciso hacer, y en esto hay acuerdo general, es plantear el problema antes de afrontar su solución.

El objeto de nuestra investigación podemos enmarcarlo dentro de los temas que integran lo que llamamos matemáticas avanzadas, y hemos de tener en cuenta que cada concepto avanzado se basa en conceptos más elementales y no puede entenderse sin una sólida y, a veces, muy específica comprensión de éstos.

Dreyfus (1990) apunta a dos clases de antecedentes en este tipo de investigación. Por una parte, están los trabajos de los matemáticos interesados en la educación, tales como Lebesgue, Poincaré, Hadamard, Halmos, Hilton y Thom. Estos matemáticos, todos ellos de primera clase, reflexionaron sobre la enseñanza de las matemáticas, y fueron muy serios en ello, aunque cometieron un error, que fue tomar como base únicamente el contenido matemático y su estructura, y olvidar los procesos de pensamiento de los estudiantes.

Por otra parte, están los antecedentes en la investigación cognitiva en aprendizaje de las matemáticas, que aborda temas elementales. Esta investigación ha sido la predominante en la comunidad investigadora del International Group in the Psychology of Mathematics Education (PME) hasta mediados de los ochenta. Pero, a partir de 1985, surge un grupo de trabajo sobre pensamiento matemático avanzado, en el que uno de los temas más frecuentes de discusión se refiere a la diferencia existente entre los **conceptos matemáticos definidos formalmente y los procesos cognitivos por los que se conciben.**

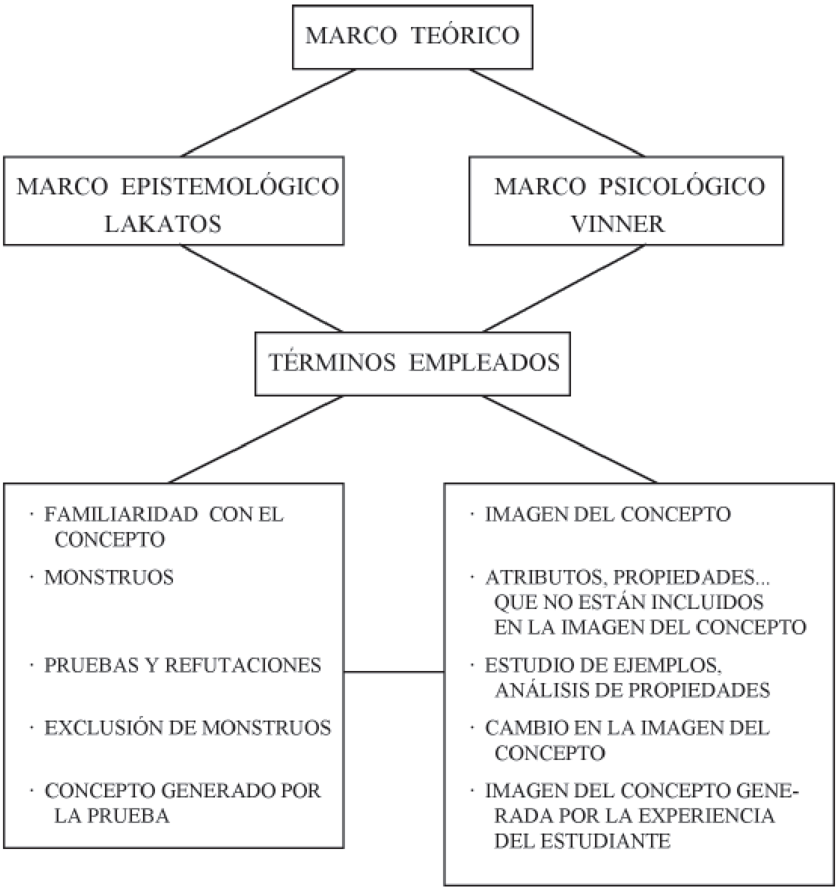
A partir del año 1985, se puede hablar de un creciente cuerpo de investigación que liga las matemáticas con la mente de los estudiantes a través de lo que Tall y Vinner acuñaron en el año 1981 con el término de *concept-image*[1]. La imagen del concepto es algo no verbal asociado en nuestra mente con el nombre del concepto que se ha ido formando a través de los años por medio de experiencias de todo tipo, y cambiando a medida que el individuo ha encontrado nuevos estímulos y ha ido madurando.

3. Marco teórico

Una vez precisado cuál es el objeto de nuestra investigación y cuáles son los antecedentes de ésta, nos parece adecuado determinar el **marco teórico** del trabajo.

Hemos pensado que la idea de tener una versión dinámica de la historia de los conceptos podría encajar, de alguna manera, con la evolución de las imágenes de los conceptos que se produce en la mente de los estudiantes. De ahí nos viene la idea de establecer un paralelismo entre los términos empleados por Lakatos y Vinner y asumir, como marco epistemológico, al primero, y, como marco psicológico, al segundo. Para ello hemos tratado de establecer un paralelismo entre los términos empleados por ambos.

[1] Adoptamos para el presente trabajo la traducción de este término como “ima-gen del concepto”.



Nos pareció interesante determinar el papel que juegan en la formación de la imagen del concepto

- los procesos de resolución de problemas y realización de tareas,
- los errores,
- los procesos visuales,
- la utilización del ordenador y
- las distintas secuencializaciones del currículum.

Hemos hablado en el epígrafe 2 de que existen diversos puntos de vistas desde los que se puede estudiar un problema de investigación. Nuestra elección viene determinada por nuestra dilatada carrera docente en la asignatura de Cálculo, tanto en Secundaria como en Universidad, a lo largo de la cual hemos localizado dificultades en la construcción de conceptos y procesos matemáticos, cuyo origen lo situamos, no tanto en la complejidad de la teoría, como en la estructura de los modos de transmisión, ya que estos se han impregnado fuertemente de los del paradigma típico del discurso matemático puro. A ello obedece que una investigación adecuada en educación matemática, desde nuestro punto de vista, deba trascender, en primer lugar, a los contenidos matemáticos mismos, y en este caso concreto a la reconstrucción del currículum vigente, y en segundo lugar, al modo de transmisión de esos contenidos. A ello se debe que, en esta investigación, encontremos dos fases muy diferenciadas:

- una primera fase en el campo del desarrollo de las ideas matemáticas, y
- una segunda fase que tiene lugar en el campo de la investigación educativa.

Como es natural, cada una de ellas se afronta con objetivos distintos y, por ello, con distintos medios para su consecución, a los que nos referiremos más adelante.

4. Identificación de las imágenes más relevantes del concepto de integral en la historia y en el currículum

4.1. Historia

Si cuestionamos la integral de Riemann, en el sentido de que causa problemas de comprensión en los estudiantes, la finalidad primera de la investigación es encontrar un modelo teórico dentro del contexto matemático que nos permita introducir la integral definida a nivel conceptual a los estudiantes de Secundaria que todavía no han sido iniciados en el cálculo. Para ello, y de acuerdo con el marco teórico elegido, lo más adecuado es tratar de identificar las imágenes más relevantes en el concepto de integral, para lo que hemos de recurrir a la historia y al currículum y textos escolares.

A la hora de determinar la **metodología** a seguir en el estudio de la génesis histórica, hemos tenido en cuenta la idea de Lakatos (1981) en la que los errores, las dudas y las contradicciones son otras tantas indicaciones de cómo se han desarrollado los conocimientos matemáticos en la historia. Por ello, se han consultado fuentes históricas primarias, siempre que esto ha sido posible, y, en su defecto, obras de los historiadores, estas últimas, con ciertas precauciones. Hemos leído la redacción de cada hecho en varios historiadores para descubrir las divergencias y contradicciones eventuales en unos y otros. Este trabajo es muy dificultoso, ya que, en Matemáticas, la aparición de su historiografía fue inexplicablemente lenta; si a ello añadimos que algunos autores, como Euclides, Arquímedes –en todas sus obras, a excepción de *El Método*– y Apolonio –en sus obras formalmente matemáticas– eliminaron "todo rastro de andamiaje" con el cual se hubiera podido reconstruir su demostración, nos daremos cuenta de las dificultades que presenta este trabajo.

Sin embargo, a partir de 1600, fecha que marca una divisoria como ninguna otra en la historia de la Matemática, el trabajo es más fácil, debido a que las fuentes son libros que son por sí mismos los acontecimientos y no sólo libros que nos sirven para reconstruir éstos.

Este estudio (Turégano, 1993) nos lleva a la conclusión de que es posible reconstruir el estudio de la integración tomando como idea central el cálculo de áreas planas y a identificar las distintas imágenes del concepto de integral.

- En la primera mitad del siglo XVII aparecen en las obras de todos los matemáticos intentos de aplicar métodos infinitesimales al cálculo de áreas. El universo de las figuras cuya área se deseaba calcular estaba en expansión constante. Nos encontramos ya ante el problema general de calcular el área de cualquier región encerrada por rectas y curvas.

Encontramos numerosos ejemplos de cálculos de áreas bajo curvas que fueron realizados con independencia del trazado de tangentes. **Esta es la primera concepción de la integral: cuadratura con independencia de tangentes.**
La obra de Euler (1707-1783), en la que se reconocen las funciones en lugar de las curvas como objeto de estudio, permitió la gradual aritmetización del análisis y su consecuente separación de la geometría. El problema de la integración era el de determinar una función primitiva $F(x)$ que tuviera como derivada $f(x)$. **Durante el siglo XVIII y parte del XIX el cálculo integral es definido como el inverso del diferencial.**

- Comienza el siglo XIX con un cambio conceptual de lo que es una función: se acepta la definición de función de una variable real como "correspondencia arbitraria entre números reales".
  Esta nueva situación lleva al siguiente planteamiento: si se pueden considerar funciones arbitrarias, y éstas no se pueden expresar como ecuaciones, ¿tiene sentido preguntarse por el significado de la integral sobre estas funciones? Inevitablemente, tiene que haber una nueva concepción de la integral, rompiendo con la del siglo XVIII. Entre los matemáticos involucrados en la resolución de la pregunta anterior, encontramos a Cauchy y Riemann.
  Cauchy (1789-1857) presenta **una definición de integral como límite de una suma**, y una formulación rigurosa del teorema fundamental del cálculo –que se reproduce en casi todos los textos modernos–, y es que, al dar una definición aritmética de integral, podía ahora establecer la relación inversa entre diferenciación e integración sin recurrir a los conceptos intuitivos de área.
  Al extender la aplicación de la prueba de convergencia de Dirichlet a una clase más amplia de funciones, Riemann (1826-1866) formula la generalización de la integral de Cauchy.

- El intento de medir conjuntos arbitrarios de puntos de la recta tiene su origen en la dependencia entre la integrabilidad en el sentido de Riemann y la continuidad.
  Peano, en 1887, da la primera definición formal de área. Retoma, como punto de partida para su definición, la idea de Eudoxo y su método de exhausción.
  Es éste el punto donde el concepto de integral regresa a su motivación original.
  Borel, en 1898, capta los defectos de la definición de contenido de Peano-Jordan e intenta subsanarlos.
  Lebesgue, en los primeros años del siglo XX, precisa las indicaciones hechas por Borel; define la medida exterior e interior utilizando los intervalos-serie como conjuntos fundamentales.
  La teoría de la medida de Lebesgue ha sido muy fecunda y ha servido de base para la teoría más general de integración. **Regresa de nuevo a los métodos intuitivos anteriores a Cauchy, pero la definición de medida les da una fundamentación lógica sólida.**

4.2. Currículum y textos

Paralelamente al estudio epistemológico, hemos considerado necesario precisar también el desarrollo histórico, en lo que a transmisión del conocimiento de los conceptos de área e integral se refiere, para determinar las imágenes del concepto a través del currículum y los textos escolares.

El siglo XIX es el foco natural para iniciar la investigación de los libros de texto, ya que fue el período de implantación de un sistema escolar general controlado por el estado.

Son los libros de texto los que, en realidad, determinan la práctica docente, mucho más que los decretos ministeriales y los programas oficiales, razón por la que nos hemos visto obligados a revisar un amplio abanico representativo de los textos que nos permita determinar cómo ha ido evolucionando el tratamiento del área y de la integral en las Matemáticas escolares. También hemos revisado los documentos oficiales para determinar los cambios en el currículum, que hemos visto se deben, fundamentalmente, a la ampliación de la escolaridad obligatoria.

Para el análisis de los textos, hemos adoptado muchos de los puntos de vista e ideas de Schubring (1985, 1987), que propone un esquema tridimensional para su análisis:

- Analizar los cambios dentro de las varias ediciones de un libro de texto.
- Hallar los cambios correspondientes en otros libros de texto pertenecientes al mismo tema.
- Relacionar los cambios en los libros de texto con cambios en el contexto: cambios en los programas, decretos ministeriales, debates didácticos, etc.

De este análisis destacaríamos, por lo que se refiere a los **textos**, lo siguiente:

1. Se aprecia una notable diferencia entre los textos analizados del siglo XIX y los de la primera mitad del siglo XX, tanto en lo concerniente al tratamiento del área como de la integral. Los textos analíticos que realmente se dedicaban a construir la magnitud dan paso a unos textos totalmente sintéticos que presentan el área ligada a su aspecto cuantitativo.
   Atribuimos este notable cambio, en primer lugar, al cambio de lenguaje: se pasa de un lenguaje geométrico a un lenguaje algebraico; en segundo lugar, a la introducción del sistema métrico decimal, que permite dar un carácter eminentemente práctico a la enseñanza de las medidas.
2. Por lo que respecta al cálculo integral, en los textos del siglo XIX es presentado como el inverso del diferencial utilizando la toma de un elemento diferencial para resolver el problema general de la cuadratura de las curvas.
   A lo largo del siglo XX se pone de manifiesto el paradigma clásico de la enseñanza del cálculo: límite de Weierstrass e integral de Riemann con la secuencialización propia del desarrollo deductivo del cálculo infinitesimal presentando

los conceptos con su definición formal y propiciando una enseñanza rigorista.

3. En el período comprendido entre 1965 y 1980 lo más destacable en los nuevos textos de Educación General Básica es un intento por distinguir el objeto que se va a medir de su medida. Para ello se utiliza el término superficie.

   Los objetos que presentan para medir son más variados que los presentados en los textos anteriores.

   Aparece, por primera vez, con entidad propia la cuadrícula como un método cómodo para medir superficies tanto de figuras poligonales como de figuras no rectilíneamente limitadas. La finalidad del cuadriculado y sus sucesivos refinamientos es mostrar que se puede enmarcar el área entre números decimales cada vez más próximos.

4. En lo referente al cálculo infinitesimal, se aprecia en algunos textos del período 1965-1980 un cambio metodológico consistente en una introducción intuitiva de los conceptos a tratar a base de ejemplos concretos, para finalizar con la definición formal. Los conceptos siguen introduciéndose siguiendo el camino lógico de su desarrollo y no el genético.

   El enfoque más común de la estructura de la matemática en los textos de Bachillerato es el enfoque formalista. Da la impresión de que la enseñanza de la matemática en este siglo está más interesada en demostrar rigurosamente la validez de sus resultados que del origen y aplicación de los mismos.

   Hay una tendencia generalizada a enseñar el cálculo de una forma lagrangiana: la función es el objeto de estudio, y el cálculo infinitesimal está centrado en las reglas del paso de $f(x)$ a $f'(x)$, y viceversa.

   Se utiliza la integral desde el punto de vista analítico puro, con objeto de tener un instrumento apto para las aplicaciones, por lo que las aplicaciones concretas son así consideradas como aplicaciones de las integrales al cálculo de áreas y volúmenes.

El tipo de información que aparece en los textos –figural, simbólica y semántica– y la articulación que de ella se hace pensamos que crea una discontinuidad en el proceso de aprendizaje.

Con respecto a los **cuestionarios oficiales**, destacaríamos lo siguiente:

1. La enseñanza de la **medida** en los cuestionarios oficiales hasta pasada la primera mitad del siglo XX viene justificada por su carácter práctico, insistiendo en su uso social y en la utilización del sistema métrico. Está fuertemente ligada a la de la numeración decimal, y las superficies no se miden efectivamente: se calculan aplicando fórmulas.
2. A partir de 1965 la ampliación de la escolaridad obligatoria a los 14 años obliga a plantearse nuevos objetivos con relación a los contenidos. Ya no es cuestión de tener que limitarse a lo que es útil en la vida práctica. Al lado de este objetivo puramente práctico se pretende dar a la enseñanza de las medidas un objetivo teórico.
3. En la ley de 1970 aparece en los cuestionarios la recomendación de construir la noción de medida antes de utilizar los instrumentos usuales. Pero la distinción entre objeto-magnitud-número no está claramente diferenciada en las recomendaciones metodológicas.
4. En los cuestionarios de principios de los 80 aparecen tres objetivos referentes al bloque temático de la medida: un objetivo teórico de construcción de la noción de medida, un objetivo práctico de medición y un objetivo social de conocimiento de las unidades legales. Pero si analizamos las actividades propuestas, nos damos cuenta de que éstas no facilitan la formación o comprensión del concepto sino que implican que ya está formado.
5. A lo largo de todo el siglo XX, el enfoque dado al **cálculo diferencial e integral en los cuestionarios** respeta la secuencia lógica del desarrollo deductivo del cálculo infinitesimal: funciones de variable real, concepto de

límites de funciones, continuidad de funciones, concepto de derivada de una función, integral indefinida como función primitiva y, por último, nociones elementales sobre la cuadraturas como límite de una suma de elementos infinitesimales.

6. En la Ley Orgánica General del Sistema Educativo de 1990 se amplía la escolaridad obligatoria a los 16 años, y hay una nueva propuesta en la que se explicita claramente que se ha de construir la magnitud antes de definir la aplicación medida que permita asignarle un número. Sin embargo, en la propuesta de actividades faltan experiencias en las que se lleve a cabo la adición de magnitudes, y no sólo de sus medidas.

   Por lo que respecta al cálculo infinitesimal, se diferencia de los anteriores cuestionarios en la recomendación de comenzar con tratamiento intuitivo, a la vez gráfico y analítico, de las funciones, e introducir el concepto de integral definida a partir del cálculo de áreas definidas bajo una curva. Aunque se hace alusión al método genético, éste no queda reflejado en la propuesta de actividades ni de contenidos, ya que la organización de éstos últimos sigue siendo la secuencia lógica del desarrollo del cálculo.

De todas estas observaciones destacaríamos las siguientes:

- es posible reconstruir el estudio de la integración tomando como punto de partida el cálculo de áreas planas, y
- la propuesta curricular de la LOGSE del año 1990 es clara, en el sentido de que explicita que se ha de construir la magnitud antes de definir la aplicación medida que permita asignarle un número, y, respecto al cálculo infinitesimal, recomienda comenzar con un tratamiento intuitivo, a la vez que gráfico y analítico, de las funciones, e introducir el concepto de integral definida a partir del cálculo de áreas definidas bajo una curva.

Nos parece, pues, que éste es el momento adecuado para introducir el cambio conceptual por el que nosotros abogamos, y, tomando como base los estudios de Lebesgue sobre magnitudes e integral, decidimos que la definición geométrica de integral dada por Lebesgue (1928) puede ser el modelo a seguir. Nuestro reto consiste en traducirlo a un modelo teórico asequible conceptualmente para los estudiantes de Secundaria. (Turégano 1991, 1992, 1994)

5. Diseño y puesta en práctica del experimento. Análisis de datos

La segunda fase de nuestra investigación –que tiene lugar en el campo de la investigación educativa– comienza con un diagnóstico sobre la situación de partida de los estudiantes respecto a tres temas que consideramos pueden influir en la formación de las imágenes del concepto de integral. Las conclusiones obtenidas, junto con el modelo teórico elaborado, serán lo que nos permitirán después elaborar las situaciones didácticas en base al modelo constructivista del aprendizaje.

El **modelo constructivista** inspira una nueva forma de enfocar las actividades escolares que se basa en el hecho de que los estudiantes tienen unos conocimientos previos sobre los fenómenos que se estudian, y que es necesario que el profesor conozca y aproveche este punto de partida, provocando en ellos una reestructuración de sus ideas que les permita evolucionar en su comprensión del mundo cotidiano y científico.

Esta etapa de la 2ª fase la afrontamos con los objetivos siguientes:

- Describir la situación de los estudiantes de la muestra en cuanto a su rendimiento en cuestiones relacionadas con el infinito, visualizaciones y áreas.
  Los medios utilizados fueron pruebas de lápiz y papel, presentando los resultados bajo criterios cuantitativos.

- Delimitar perfiles o clases de estudiantes en base a las respuestas y estrategias de resolución utilizadas por ellos en los cuestionarios anteriores y durante la entrevista clínica.
  Las clases fueron obtenidas mediante un análisis factorial de correspondencias, seguido de una entrevista clínica a los estudiantes seleccionados de cada clase, y terminando con el procesamiento de los resultados bajo criterios cualitativos.

A la hora de determinar la **metodología** para llevar a cabo esta etapa de la investigación, observamos, en la bibliografía consultada, que todavía no se ha llegado a un consenso respecto a la adecuación de métodos en investigación educativa.

Cook y Reichart (1986) consideran que un investigador no tiene por qué adherirse ciegamente a uno de los paradigmas polarizados que han recibido las denominaciones de "cualitativo" y "cuantitativo", sino que puede elegir libremente una mezcla de atributos de ambos para atender mejor las exigencias del problema de investigación con que se enfrenta. El reconocimiento de que una síntesis multimetodológica parece ser una aspiración que suscita un amplio consenso entre los investigadores en las Ciencias Sociales nos hace pensar en la combinación de ambos en nuestra investigación; lejos de ser antagónicos, resultan complementarios y contribuyen a corregir los inevitables sesgos presentes en cualquier método.

A la hora de tener en cuenta los **elementos** metodológicos en la planificación de una investigación en Educación, hemos observado en todos los autores consultados un criterio común en la consideración de las etapas de un trabajo de estas características:

- Diseño de la experiencia
- Recogida de datos
- Análisis de datos
- Resumen de resultados

En un momento determinado, hemos utilizado los métodos factoriales que están emparentados, en un principio, con las técnicas de análisis factorial propuestas y puestas a punto a principios de siglo por los psicólogos. Utilizan unos cálculos de ajuste que recurren, esencialmente, al álgebra lineal, y producen unas representaciones gráficas donde los objetos que se han de describir se transforman en puntos sobre un eje o en un plano.

Se utiliza con el fin de dar a una tabla de datos una representación geométrica que permita observar las asociaciones entre los elementos de dicha tabla.

Benzécri (1984) y la aparición de los ordenadores son los responsables del desarrollo de este método.

Hemos utilizado el CHADOC, versión 3.0 del *Département Informatique de l'IUT de Nice* para la tabulación de los datos.

Esta puede ser una de las **aportaciones** originales de la investigación desde el punto de vista metodológico: el haber utilizado el análisis factorial de correspondencias con la finalidad de clasificar a los estudiantes en base a tres temas de estudio (infinito, visualización y áreas), para poder incorporar a las situaciones de aprendizaje las intuiciones preexistentes en los estudiantes.

<u>Cuestionarios diagnóstico</u>

- **Intuiciones sobre el infinito y los límites**
  Utilizado por Turégano y Penalva (1990), que se elaboró tomando como referencia el de Fischbein et al. (1979).
- **Visualización**
  Utilizado por Turégano et al. (1990), que, con pequeñas modificaciones, era el de la tesis de Lasserre pasado en Marruecos.
  En principio, este cuestionario, en que la clave son las imágenes gráficas, puede parecer que está alejado del estudio que hemos realizado en esta tesis, pero, dado que la visualización no es una habilidad que tengan todos los estudiantes y que, a nuestro parecer, es importante, tanto para la comprensión de los conceptos de cálculo como en la

resolución de problemas de áreas, nos propusimos estudiar de alguna manera qué estudiantes la poseen. Es evidente que tienen más relación con el tema de estudio los diagramas que las figuras, pero también es evidente que los diagramas utilizan convenciones, notaciones, generalizaciones y abstracciones sin las que el diagrama es ininteligible. Pensamos que con estos estudiantes que no han realizado gráficas de funciones, de entrada, no podríamos obtener información sobre su habilidad para visualizar este tipo de diagramas, simplemente porque carecen de la información suficiente para interpretarlos.

- **Estrategias en la resolución de problemas de área**
  Problemas que no tienen que ver con lo que se hace normalmente en la enseñanza. Si vamos a introducir el concepto de integral partiendo del área, necesitamos saber dónde están los problemas de los estudiantes con el área. Este cuestionario es de elaboración propia para esta tesis.

Muestra

La muestra tomada para administrar estos cuestionarios estaba compuesta por tres grupos de primer curso de BUP (14-16 años) pertenecientes a 3 Institutos de Albacete, en los que contamos con la colaboración de tres profesores.

Se eligieron estudiantes de 1º de BUP porque aún no han sido iniciados en el estudio del cálculo infinitesimal y porque, posteriormente, en la etapa de aprendizaje, podríamos estudiar si alternativas distintas permiten a los estudiantes acceder a determinados conceptos de cálculo de una forma intuitiva antes de lo que recomiendan los cuestionarios oficiales.

Los cuestionarios se administraron en 3 días distintos durante la hora habitual de clase y por el profesor de matemáticas de cada grupo.

Posteriormente, fueron corregidos por la entrevistadora, y, de acuerdo con una clasificación hecha en base al rendimiento en los cuestionarios, consideramos que un estudiante es infinitista, si resuelve el 50 por ciento o más de las cuestiones sobre el infinito. En caso contrario, es finitista. Un estudiante es visual, si resuelve el 50 por ciento o más de las cuestiones sobre visualización, y consideramos que tiene éxito en problemas de áreas, si resuelve el 50 por ciento o más de las cuestiones sobre áreas. Con ello determinamos el rendimiento en los cuestionarios.

Procesamos los datos mediante un análisis factorial de correspondencias, mediante el cual obtuvimos los estudiantes que debíamos entrevistar, cuyas características son las siguientes:

	VISUAL ÁREA	VISUAL NO ÁREA	NO VISUAL ÁREA	NO VISUAL NO ÁREA	
INFINITISTAS	B16 C76 B31	A41 B4 C74 A42 B19 C75 A53		A39 A40	12
FINITISTAS	B30 C69 C84	A50 B7 C82 A51 B14 B21 B36	C65	A54 C66 A59 C86	15
	6	14	1	6	27
	20		7		
	VISUALES		NO VISUALES		

A continuación, procedemos a entrevistar a los representantes de clases y al análisis de sus respuestas.

Las 27 entrevistas realizadas tuvieron una duración aproximada de 1 hora, todas ellas realizadas y grabadas por la entrevistadora, siendo posteriormente transcritas literalmente por la misma.

Las primeras respuestas podemos considerarlas como intuitivas en el sentido psicológico, es decir, respuestas inmediatas a una situación: respuestas no aprendidas (Tall, 1985).

En algún momento, las entrevistas clínicas tuvieron una finalidad formativa, pues en ellas se quería evaluar la capacidad de aprendizaje del individuo. Esto ocurría en el cuestionario del "infinito" y "áreas".

Una vez transcritas y analizadas las 27 entrevistas, realizamos una reclasificación de los estudiantes de acuerdo con sus modelos de respuesta, que a veces no coinciden con lo que habían manifestado en los cuestionarios escritos, bien porque era una respuesta dada al azar, bien porque era copiada, etc.

Los cuadros siguientes nos muestran la clasificación definitiva de los estudiantes de acuerdo con las estrategias de resolución y con las imágenes del concepto puestas en evidencia en las entrevistas.

CUESTIONARIO INFINITO

INFINITISTAS	A39 A41 A42 A53 B16 B19 B31 C75 C76	9	33'3 %
TRANSICIÓN	A40 A51 A54 B4 C69 C74 C82	7	26 %
FINITISTAS	A50 A59 B7 B14 B21 B30 B36 C65 C66 C84 C86	11	40'7 %
		27	

CUESTIONARIO VISUALIZACIÓN

	ESTRATEGIAS UTILIZADAS			
	PARCIALES	GLOBALES		
VISUALES	A42 A53 B19 B30 C75 C76	B16	7	26 %
VERBALES	A39 A40 A50 A54 A59 B7 B14 B21 B36 C65 C66 C74 C86		13	48 %
MIXTAS	A41 A51 B4 C82 C84	B31 C69	7	26 %
	24	3	27	
	88'9 %	11'1 %		

CUESTIONARIO ÁREAS

PRIMITIVA	A39 A40 A54 B4 B7 C66 C86	7	25'9 %
OPERATIVA	A41 A42 A50 A51 A53 A59 B14 B16 B19 B21 B30 B36 C65 C69 C74 C76 C82 C84	18	66'7 %
DESCRIPTIVA	B31 C75	2	7'4 %
		27	

INS 1: A39, A40 ...... A59
INS 2: B1 .... B38
INS 3: C60 .... C89

De todas las conclusiones obtenidas acerca de la situación inicial, destacamos las que referimos a continuación.

1. Cuando se trata de reconocer la infinitud de un conjunto acotado enmarcado en un contexto geométrico, el estudiante tiene problemas, debidos, principalmente, a las nociones de segmento y punto, pero estos son mucho mayores cuando se trata de determinar la infinitud de dos conjuntos de esas características.
2. El criterio de la biyección se revela en ellos más fuerte que el de la inclusión, aunque éste sólo surge de forma espontánea cuando se trata de comparar conjuntos numéricos.
3. La concepción del infinito potencial es el mayor obstáculo con que se encuentra un estudiante para concebir un proceso infinito como algo definido o acabado. El infinito actual se acepta en mucho menor grado, y siempre como algo que involucra una cierta indeterminación.
4. Todos los estudiantes que admiten la existencia de procesos infinitos como algo definido o acabado esgrimen los mismos argumentos: no cambian al añadirle uno. Hay, por tanto, un empleo tácito del infinito como entidad numérica que consiste en afirmar que no cambia al añadirle uno, o en asegurar que en un proceso infinito llega un momento en que, al dar un "paso más", nada cambia.
5. Los procesos infinitos que conducen al infinitamente pequeño son más difíciles de intuir, como tales, que los que conducen al infinitamente grande.
6. Ver las matemáticas como una copia casi fiel de lo que uno cree que es la experiencia sensible es la imagen más problemática que se plantea en los estudiantes, ya que les induce a pensar que las matemáticas son una prolongación de su percepción de los objetos y que están en esos objetos mismos.
7. Una de las grandes dificultades que existen para que los estudiantes modifiquen sus intuiciones está ligada

a sus ideas duales de los objetos matemáticos (ideas-representaciones).

8. La comprensión de un concepto precede, generalmente, a la capacidad para expresarlo verbalmente. Por ello las expresiones utilizadas por los estudiantes, aunque presentan dificultades lingüísticas, no nos han parecido relevantes en general para la construcción de sus imágenes ni para la utilización correcta de las mismas. Esto se puso de manifiesto, de una forma especialmente notable, en el cuestionario sobre “áreas”.
9. Constatamos que los procesos visuales en los que es necesario poner de manifiesto el pensamiento operativo crean, como era de esperar, más problemas a los estudiantes que aquéllos en los que interviene solamente el pensamiento figurativo.
10. La determinación de partes ocultas y el trazado de aristas son los problemas más serios que presentan los estudiantes en la visualización de figuras tridimensionales en su representación gráfica plana.
11. Los estudiantes remiten con mucha más frecuencia a un análisis parcial de las figuras (que les permite pasar de las partes al todo) que a un análisis global.
12. Los estudiantes ponen de manifiesto tres tipos de estrategias: visuales, verbales y mixtas. Un estudiante utiliza razonamiento visual cuando da imágenes mentales; razonamiento verbal o analítico, cuando responde a través de razonamientos sobre la figura del papel y no sobre la imagen mental, y razonamiento mixto, cuando simultanea los dos anteriores.
13. Los estudiantes tienen dificultad para utilizar mentalmente el recorte-pegado como estrategia para pasar de un polígono a otro. Sin embargo, cuando se trata de reconocer la igualdad de áreas entre polígonos de distinta forma o con otras regiones, el recorte-pegado se revela como uno de los métodos mejor aceptados por los estudiantes. Este método

lleva implícito el reconocimiento de la conservación del área y de la propiedad aditiva.

14. Los estudiantes no recurren al cuadriculado para determinar el área de una región rectilínea o curvilínea, pero sí son capaces de utilizar correctamente la relación inversa del área con la unidad de medida.
15. Constatamos la falta de estrategias para resolver problemas de áreas, aunque esto no impide a los estudiantes utilizar correctamente el área de forma operativa, lo que pone en evidencia un aprendizaje descuidado.
16. Los cortes laminares por planos paralelos o descomposiciones infinitesimales de las superficies no son procedimientos evocados espontáneamente para el cálculo de áreas por los estudiantes, ni en el caso de figuras rectilíneamente limitadas ni curvilíneas. Quizá esto se debe a tener que romper con la imagen que tienen del área como espacio que hay que cubrir.
17. La imposibilidad de "ver" un área como límite de una suma de infinitesimales tiene su origen en que "pasan" al indivisible de una dimensión menos antes de sumar las áreas, y en el paso al límite les "desaparece" el área. Esto pone en evidencia que el cálculo de un área bajo una curva definida por una función crearía problemas al tratar de remitir a los indivisibles de longitud $y = f(x)$.
18. Se observa en los estudiantes, tanto en el cuestionario de "infinito" como en el de "áreas", un empleo tácito del infinitesimal como algo muy pequeño pero distinto de cero. En este caso concreto, puede considerarse como una excrecencia de su percepción. Indudablemente que estas primeras intuiciones sobre los infinitesimales nos parece que están ligadas a los infinitesimales del análisis no-estándar.
19. Se han identificado tres imágenes asociadas al concepto de área que hemos designado con los apelativos de **primitiva**, **operativa** y **descriptiva**:

- Un estudiante manifiesta una imagen **primitiva** del área si sólo admite la noción de área caracterizada por una concepción, por parte del entendimiento humano, de las formas espaciales en lo referente a su extensión.
- Un estudiante manifiesta una imagen **operativa** si alcanza el concepto de área asignando propiedades a la noción y refiriéndose a ella en dos sentidos: área como superficie comprendida dentro de un perímetro y como medida de dicha superficie.
- Un estudiante manifiesta una imagen **descriptiva** del área si, a la imagen operativa, une la descripción de lo que entiende por área, ligándola a sus propiedades, que puede utilizar y explicitar verbalmente, y relacionándola con la "clase de equivalencia" de todas las superficies de igual área.

5.2. Diseño de situaciones didácticas

La finalidad de esta etapa es diseñar las situaciones didácticas en base al modelo matemático encontrado en la primera fase y a las coclusiones de la primera etapa.

Nuestra **hipótesis** de trabajo es que los estudiantes pueden aprender (de forma intuitiva) conceptos de cálculo sin el dominio previo o simultáneo de las usuales habilidades algorítmicas, utilizando la visualización a través del ordenador para dar significado al concepto (y subconceptos) de integral definida y a sus propiedades mediante la idea de área bajo una curva. Se pueden construir modelos visuales que reflejen la estructura matemática subyacente y que permitan abstraer el proceso de construcción del concepto, y no sólo el concepto, ayudándonos del ordenador.

Partimos de que los estudiantes están familiarizado con el concepto de área y tienen ciertas intuiciones sobre el infinito y el concepto de límite, si bien es un concepto un poco ingenuo. Queremos estudiar si estos conceptos ingenuos se borran y se reemplazan por conceptos generados por el trabajo de los estudiantes. La situación-problema de la que nos vamos a servir aquí es la de presentar sucesiones que convergen en un mismo número, apoyando esta situación con una imagen visual a través del ordenador que les haga sentir la necesidad de modificar o romper con la imagen de que el límite “no se alcanza”. Dado que las ideas sobre límites empiezan a desarrollarse cuando se pueden explorar las situaciones en las que una sucesión se establece o converge, y que esto puede ser más real en una situación geométrica, nos hemos aprovechado de ello y, con ayuda del ordenador, pueden visualizar que cierto resultado es plausible y, de este modo, pueden luchar contra sus intuiciones.

Un aspecto a destacar del material elaborado es el tratamiento no formalista que se hace de los conceptos subyacentes al concepto de integral. Hemos considerado que los procesos de resolución de problemas pueden servir para unir conceptos y conducir a una integración del conocimiento, razón por la que las situaciones de enseñanza están diseñadas en base a la resolución de problemas.

Todas las cuestiones y problemas propuestos tienen como **objetivo** desarrollar en los estudiantes un pensamiento reflexivo sobre la construcción de la integración que contenga los elementos que les permitan organizar la experiencia previa a la formalización, acompañados de programas de ordenador que les proporcionen representaciones gráficas y resuelvan cálculos numéricos, permitiéndoles, de este modo, centrarse en los conceptos. El aprendizaje de los conceptos de sucesión, límite, número real e integral se llevan a cabo en la resolución de problemas concretos del cálculo de áreas.

La facilidad de acceso que se tiene hoy día a la calculadora y al ordenador hace que este acercamiento a la integral sea más fácil de comprender que el del límite de una suma de áreas, ya que hemos utilizado un enfoque que reduce el cálculo de áreas de distintas superficies a una fórmula básica que conocen todos los estudiantes: la del área del rectángulo. Hemos evitado los infinitesimales, utilizando, a su vez, un método geométrico y numérico.

El hecho de presentar la integral sólo en el contexto matemático y con funciones polinómicas tenía el objetivo de que nada variara en el primer contacto del estudiante con el concepto con respecto a lo que se hace normalmente en la enseñanza. Por la misma razón, hemos utilizado el nombre de "área bajo una curva" para referirnos al área determinada por la gráfica de $f(x)$ y el eje x en el intervalo $[a, b]$.

Aunque somos partidarios de unas matemáticas contextualizadas que tengan sentido y que sirvan, por tanto, para resolver problemas reales y que constituyan un soporte del modelo matemático que se estudia aquí, en este caso no hemos podido llevarlas a la práctica ya que se trata de una investigación en la que uno de los puntos que se han de evaluar es precisamente si este acercamiento a la integral permitiría una transferencia a otros contextos.

Hemos eliminado, en la medida de lo posible, todos los cálculos algebraicos, la manipulación simbólica y el trazado de gráficos por parte del estudiante para evitar que otros problemas pudieran obstaculizar los problemas reales que queremos observar, como son **la comprensión del concepto y la transferencia a otros contextos**. A pesar de ello, algunas de las sesiones de aprendizaje las hemos dedicado a la adquisición de algunas destrezas.

5.3. Etapa de aprendizaje

En esta etapa reducimos la muestra a un instituto ya que los estudiantes presentaban éxitos y fracasos similares en los tres cuestionarios de la etapa de preaprendizaje.

La etapa de aprendizaje se lleva a cabo en 8 sesiones que tienen como objetivo introducir a los estudiantes de 1º de BUP (14-16 años) en el concepto de integral definida y los subconceptos subyacentes mediante la resolución de problemas de áreas. Tiene lugar en mayo de 1992.

Consta de dos partes: en la primera, las sesiones consisten en trabajar en el aula con el profesor de la asignatura el material preparado por la investigadora, y se llevan a cabo en el horario habitual de clase; en la segunda parte, las sesiones se realizan fuera del horario escolar y consisten en prácticas con ordenador, en dos grupos, con una duración media de 60 minutos por sesión, en las que están presentes el profesor y la investigadora. Dentro de cada grupo se asigna un ordenador a cada dos o tres estudiantes.

Afrontamos esta etapa con los objetivos siguientes:

- Observar las respuestas espontáneas y debates de los estudiantes en el aula cuando, con la ayuda del ordenador, resuelven por parejas problemas de áreas y exploran el concepto de integral definida.
  Medios específicos utilizados son los problemas propuestos, programas de ordenador que les facilitamos y la metodología de trabajo.
- Describir, en momentos determinados del aprendizaje, el rendimiento de los estudiantes en cuestiones relacionadas con conceptos y destrezas necesarias para la comprensión del concepto de integral.
  Los medios utilizados fueron pruebas de lápiz y papel, presentando los resultados bajo criterios cuantitativos y análisis de errores cometidos.

De las muchas conclusiones obtenidas en las observaciones realizadas en la fase de aprendizaje destacamos las siguientes:

1. El nombre de "área bajo la curva" crea conflictos. Es lo que podríamos llamar un conflicto de impropiedad lingüística originado por el discurso del profesor, siendo posible eliminarlo mediante una elección más cuidadosa del nombre.
2. Los estudiantes utilizan frecuentemente la palabra "por debajo" en vez de "ordenada negativa" para referirse a las ordenadas de puntos pertenecientes a gráficos de funciones en que $f(x) > 0$. Una vez que se les facilita el nombre de altura para designar la ordenada, abandonan definitivamente ésta última y hablan de "alturas negativas".

3. Se ha observado en los estudiantes la utilización de las expresiones “para arriba” por “crece”, y “para abajo” por “decrece”, al referirse al gráfico de la función.
4. Sorprende la familiaridad adquirida por estos estudiantes, que presentan grandes deficiencias en la utilización del lenguaje científico, con los términos “subintervalo”, “gráfico”, y “bipartición”.
5. Los estudiantes utilizan muy frecuentemente un lenguaje gestual para referirse a los ejes de ordenadas y, en general, a las partes de las figuras geométricas. Esto se debe al poco dominio del lenguaje científico, y, de seguir utilizándolo con asiduidad lo consideramos un gran obstáculo para la adquisición de dicho lenguaje.
6. La utilización de expansiones decimales en los términos de las sucesiones de números racionales en lugar de su expresión racional es un obstáculo para la obtención del término general. A pesar de ello, los estudiantes de la muestra mostraron facilidad en la utilización de procesos de inducción y generalización.
7. Al dividir un intervalo en subintervalos, algunos estudiantes se quedan pensativos si al determinar los extremos ya no son números naturales sino racionales los números obtenidos. Piensan que entre dos naturales ya no hay más números sobre la recta, lo que implica que no hay un dominio de la recta racional.
8. En los términos de la rama de matemática implicada, los errores cometidos por los estudiantes están relacionados con el álgebra elemental, con límites e infinitud, y con la geometría elemental. Cometen bastantes errores de ejecución de la tarea y estructurales que tienen que ver con la comprensión de los conceptos implicados en el problema.
9. Es importante dar a los estudiantes la oportunidad de reflexionar sobre sus propios errores como herramienta motivadora y como punto de partida para exploraciones matemáticas creativas. Los errores pueden fomentar una

más profunda y completa comprensión del contenido matemático.

10. Observamos la existencia de problemas para acotar las gráficas en un determinado intervalo así como para graficar una parábola, siendo la inversión del orden de las coordenadas uno de los errores más comunes.
11. Es sabido que, cuando la función a integrar viene definida en dominios divididos, es decir, por diferentes reglas en subdominios diferentes, los estudiantes tienen problemas para hallar el área bajo la curva y éstos se ven incrementados si en uno de esos dominios $f(x) = 0$.
    El acercamiento que hemos propuesto a la integración permite asignar área cero a este dominio con toda facilidad y no crea problemas de comprensión al estudiante.
12. Hemos encontrado más dificultades en la utilización de la expresión analítica de las funciones que en la visualización de sus gráficos, lo que nos lleva a pensar que estos estudiantes tendrían más dificultades en la comprensión del concepto de integral como antiderivada que en el aspecto geométrico de la misma.
13. La visualización a través de ordenador ha sido provechosa para mostrar que ciertos resultados son plausibles. Ha permitido trabajar en pocos días gran cantidad de funciones y de experimentar con cada grupo de estudiantes las variaciones de los gráficos de las funciones a través de los distintos coeficientes, haciendo conjeturas sobre la forma que tendrá si tomamos los coeficientes muy pequeños, muy grandes, etc. Se ha establecido una interacción constante entre grupos de estudiantes.
14. La utilización de las sucesiones $\{H(f,a,b,n)\}$ y $\{h(f,a,b,n)\}$ ha sido de gran utilidad para razonar sobre la situación de la gráfica de $f(x)$ con respecto al eje x, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, la forma del gráfico, etc. Además, las hemos utilizado para sembrar el germen de número real.

15. Casi la totalidad de los estudiantes ha aprendido con la ayuda del ordenador a calcular áreas bajo curvas, si bien es cierto que algunos lo hacen de forma instrumental.
16. Hemos constatado que el ordenador se puede considerar como uno de los elementos más motivadores para el aprendizaje. No se puede ni debe obviar esta poderosa herramienta en los procesos educativos actuales y, de forma muy especial, en los cursos de cálculo introductorio.

5.4. Etapa de postaprendizaje

Nos proponemos evaluar el proceso de aprendizaje de los estudiantes seleccionados como representantes de clases.

Esta última etapa está relacionada con el estudio de casos, cuyos resultados serán expuestos bajo criterios cualitativos.

Las entrevistas tienen por objeto el enfrentar al estudiante, después de la etapa de aprendizaje, con problemas que tienen que ver con el área bajo una curva en tres contextos distintos: matemático, área bajo la curva velocidad y probabilidades geométricas. En ellas pensamos determinar las imágenes del concepto de integración que han formado los estudiantes, la evolución, si la ha habido, en el concepto de límite y cómo se realiza la transferencia a otros contextos con este enfoque de la integración.

Si hemos utilizado la técnica de la entrevista, ha sido porque nos permite profundizar más en el pensamiento de los estudiantes, y el facilitarles un cuestionario escrito se debe a que, en principio, ofrece mejores condiciones de trabajo para problemas de cálculo. Se les permite el uso del ordenador sólo como herramienta de cálculo.

Pensamos que no se puede tener acceso a lo que pasa en la mente de un estudiante sin verle "estar pegado" en un problema que es para él un desafío. Por ello es por lo que hemos propuesto problemas cuya resolución implica el cálculo de integrales, y que no han sido los habituales de la fase de aprendizaje.

Las preguntas fueron cuidadosamente preparadas, pero pensamos que cada entrevista tiene su propia dinámica, y muchas veces surgen preguntas distintas o nuevas. Otras veces se obvian preguntas previstas inicialmente porque la entrevistadora estima que ya han sido implícita o explícitamente contestadas, o por otras razones, tales como la actitud del estudiante o el interés por hacer hincapié en otras cuestiones. El resultado es que, finalmente, se trata de entrevistas semiestructuradas.

Hemos utilizado la técnica de resolver problemas "pensando en voz alta". La validez de tales datos fue asumida por Ericsson y Simon (1980).

En las entrevistas hay varios niveles de respuestas: una respuesta espontánea inicial y otras respuestas pensadas y argumentadas, provocadas generalmente por las preguntas de la entrevistadora.

Un análisis descriptivo detallado de las respuestas de algunos de los estudiantes, bien por considerarlas representativas o bien por ser excepciones, puede verse en Turégano (1994). Estos extractos son transcripciones literales de parte de las entrevistas.

La transcripción de las entrevistas y las posteriores audiciones de las mismas son las que han permitido finalmente poder realizar una clasificación de las respuestas hasta conseguir unos patrones que consideramos satisfactorios, una vez que cada una de las respuestas de los estudiantes ha quedado encajada en un modelo y cuando el conjunto de todos los modelos ha sido capaz de describir la situación global del grupo de estudiantes entrevistados.

La observación del cuadro siguiente nos da una idea del desplazamiento general hacia respuestas que ponen en evidencia un nivel de abstracción y representación más consolidado que el que presentaban en el preaprendizaje en cinco de los estudiantes entrevistados, hecho que se manifiesta en la descripción que hacen de la integral definida y en la utilización correcta de los distintos tipos de información y de la articulación que de ella hacen, ya que la no utilización de los distintos lenguajes puede interpretarse como falta de madurez en la asimilación de todos los aspectos del concepto.

	ÁREA	INTEGRAL
PRIMITIVA	C66 C86	C66 C86
OPERATIV	C65 C69 C74 C76 C82 C84	C65 C74
DESCRIPTIVA	C75	C69 C75 C76 C82 C84

	Resuelve correctamente	Resuelve incorrectamente	No resuelve
Problema 1 CONTEXTO MATEMÁTICO	C69 C75 C76 C82 C84	C65 C66 C74 C86	
Problema 2 ÁREA BAJO CURVA VELOCIDAD	C69 C74 C75 C76 C82 C84		C65 C66 C86
Problema 3 PROBABILIDADES GEOMÉTRICAS	C65 C69 C74 C75 C76 C82 C84		C66 C86

6. Conclusiones

A partir del análisis interpretativo realizado en la última etapa de la investigación, hemos podido corroborar muchas de las conclusiones obtenidas de las observaciones realizadas en la etapa de aprendizaje. Otras, que son las que enunciamos a continuación, se han puesto de manifiesto durante la última entrevista y están relacionadas con las imágenes acerca del concepto de integral definida que se ha ido formando en los estudiantes al presentarles el concepto vía su definición geométrica motivado por el cálculo de áreas bajo curvas, de cómo esta introducción permite una transferencia a otros contextos y de la influencia que ha tenido el uso del ordenador.

1. La introducción a la integral vía su definición geométrica nos ha permitido dar sentido a determinados conceptos de cálculo: sucesión, límite, número real e integral, en un

contexto concreto que es el del cálculo de áreas bajo curvas. Esta definición permite establecer una relación integral-medida que favorece la transferencia a otros contextos y organizar la experiencia previa a la formalización de los conceptos de cálculo.

2. Los modelos visuales en la enseñanza del cálculo y la eliminación de cálculos algebraicos (mediante el uso del ordenador) favorece la formación y transformación de intuiciones y la creación de imágenes de concepto que ayudarán posteriormente a la formalización de los conceptos de cálculo infinitesimal.
3. La clave en la evolución del concepto de límite ha estado en presentarles una situación evidente (altura única en un rectángulo) en un marco geométrico-numérico (en el que hay interacción en todo momento), situación que convence al estudiante de que realmente hay un número que mide la altura. La existencia de la integral queda así justificada con la existencia de la altura.
4. El uso del ordenador permite que el estudiante pueda simultanear todos los aspectos psicológicos que se ponen en juego en matemáticas: abstracción, representación, formación de conceptos, inducción y visualización.
5. Una visión holística del gráfico favorece la formación de la imagen de área bajo una curva y la de integral si se procede posteriormente al análisis de sus partes, no como entidades discretas, aisladas unas de otras, sino relacionadas en un todo.
6. Se han identificado tres imágenes asociadas al concepto de integral definida que hemos designado, al igual que en el área, con los apelativos de **primitiva**, **operativa** y **descriptiva**.
    - Un estudiante manifiesta una imagen **primitiva** de la integral si la asocia con una fórmula $(b - a) \cdot h$ que le permite calcular áreas de figuras “raras”. Corresponde a estudiantes con una imagen primitiva del área y que no han construido una imagen específica de integral

ni de área bajo una curva, pero que, con la ayuda del ordenador y la fórmula, pueden calcular el área bajo la curva con $f(x) \geq 0$. Esto no les permite transferir a otros contextos en que la resolución del problema pasa por identificar con el área bajo la curva. La única evolución observada es que ahora admiten la existencia del área para figuras curvilíneas, pero sólo de una forma instrumental, no a nivel conceptual del área, y esto porque ya poseen una fórmula para calcularla.

- Una imagen **operativa** corresponde a aquellos estudiantes que han construido alguna imagen mental de la integral, pero como sinónimo de área. No han integrado todos los elementos subyacentes al concepto de integral en este solo concepto, aunque, considerados aisladamente, sabe de su existencia. Efectúan el paso al límite a nivel de percepción visual, pero saben de la necesidad de alcanzar ese límite para determinar realmente el área pedida. Pueden calcular correctamente áreas bajo curvas con $f(x) \geq 0$ y transferir a otros contextos.
- Una imagen **descriptiva** de la integral corresponde a aquellos estudiantes que pueden dar una descripción verbal de lo que entienden por integral articulando perfectamente la información figural, simbólica y semántica, y consiguiendo integrar en el concepto todos los subconceptos subyacentes y los procedimientos de cálculo. Se mezcla en ellos la visión geométrica con la numérica, efectuando el paso al límite tanto a nivel de percepción visual como numérico. Pueden calcular correctamente cualquier área bajo una curva y transferir correctamente a otros contextos.

7. Para poder tener una imagen descriptiva de integral es necesario que el estudiante haya desarrollado el concepto de área como magnitud, admita la divisibilidad infinita de

un segmento y la existencia del límite, y pueda tener una visión holística del gráfico.

8. Los estudiantes que parten de la premisa falsa de que el continuo está formado por elementos indivisibles tienen dificultades para reconocer y calcular el área bajo la curva velocidad como el espacio recorrido; no así los que recurren a una relación funcional entre las tres variables: $e = v \cdot t$. Es indudable que el acercamiento a la integral como medida del área de un rectángulo congruente con la región curvilínea permite una transferencia inmediata a esta relación, ya que asocian el tiempo con la base y la velocidad con la altura.
9. Este enfoque de la integración favorece la transferencia al contexto probabilístico, ya que, al existir en los estudiantes un sustrato natural intuitivo para las nociones de probabilidad, han asociado la medida de los puntos del dominio con su área sin realizar ningún razonamiento explícito, evidentemente.
10. Observamos dos tendencias distintas en los estudiantes al tratar de justificar las propiedades de las integrales: unos eligen los números que determina la medida del área, y otros, las regiones cuya área hay que determinar. Los primeros deducen de la relación numérica, obteniendo, al resolver las integrales, la relación entre las mismas; los segundos, hallan la relación entre las integrales de la relación entre las regiones cuya área hay que determinar. Los primeros sólo pueden obtener esas relaciones en casos concretos y experimentales; los segundos pueden obtener las relaciones en casos generales.

7. Posibles implicaciones didácticas de la investigación

A partir de las conclusiones establecidas en la presente investigación se pueden extraer ciertas implicaciones didácticas, que abarcan cuestiones relacionadas con el diseño y secuenciación del currículum, así como metodológicas, tanto para el aprendizaje del área como de la iniciación al aprendizaje del cálculo infinitesimal.

Las conclusiones avalan nuestra elección didáctica así como nuestra hipótesis de trabajo.

De la lectura cuidadosa de las mismas deducimos la necesidad de una fase previa de carácter experimental antes de pretender formalizar los conceptos de cálculo infinitesimal. La etapa de aprendizaje llevada a cabo en este trabajo podría constituir el primer eslabón del aprendizaje del cálculo, si bien no podemos considerarla como un proyecto de enseñanza desde el momento en que en los problemas sólo contemplamos funciones polinómicas. Sería preciso ampliar el conjunto de funciones, incluyendo las definidas en dominios divididos, y diversificar los contextos problemáticos.

Las conclusiones hablan, asimismo, de la necesidad de un aprendizaje que les ayude a diferenciar el carácter dual que atribuyen a los objetos matemáticos, y que es una de las grandes dificultades que existen para que los estudiantes modifiquen sus intuiciones. Es precisa una estimulación que provoque discusión sobre el infinito y los límites mucho antes de que éstos sean objeto de examen para el estudiante.

Es recomendable que el profesor tenga una idea clara de la situación del estudiante en lo referente a las imágenes del concepto del área, ya que pretender crear una imagen del concepto de integral en estudiantes con una imagen primitiva del área es como predicar en el desierto.

Igualmente, sería muy conveniente conocer la situación de los estudiantes en cuanto a su habilidad para visualizar, lo que permitiría al profesor tomar conciencia de si éstos son realmente capaces de interpretar correctamente las representaciones gráficas utilizadas frecuentemente como apoyo de las explicaciones de diversos conceptos.

Por último, una conclusión que parece muy clara en este trabajo es que la introducción a los conceptos vía la resolución de problemas que han estado en el origen del concepto logran realzar la formación del mismo. Utilizar simultáneamente modos visuales y analíticos favorece establecer relaciones entre ellos, y aquí es donde el ordenador ayuda poderosamente a este tratamiento.

Este aprendizaje inicial permite procesar en profundidad y ser bien recordado. Se forma una estructura cognitiva estable sobre la que se podría construir un desarrollo posterior de las habilidades, y sería interesante tratar de ver la influencia que el aprendizaje de los algoritmos del cálculo de límites, derivadas y primitivas tendrían en la evolución de las imágenes de concepto de estos estudiantes. Pero este problema constituye por sí solo tema para otra tesis.

Referencias

BENZECRI, J.P. et al. (1984). *La Pratique de l'Analyse des Données* (2 vol). Paris: Dunod.

CORDERO, F. (1987). *El cálculo diferencial e integral como un solo concepto: la derivada*. Xalapa (Veracruz. México): Memorias del IX Congreso Nacional de la Asociación de Profesores de Matemáticas, 232-239.

COOK, T.D. & REICHARDT, C.S. (1986). Hacia una superación de los enfrentamientos entre los métodos cualitativos y cuantitativos. En *Métodos cualitativos y cuantitativos en investigación evolutiva*, 25-58. Madrid: Morata.

DREYFUS, T. (1990). Advanced Mathematical Thinking. In *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International group for the Psychology of Mathematics Education*, 113-134. Cambridge University Press.

ERICSSON, K.A. & SIMON, H.A. (1980). Verbal Reports as Data. *Psychological Review*, vol. 87, 215-251.

FISCHBEIN, E., TIROSH, D. & HESS, P. (1979). The intuition of infinity. *Education Studies in Mathematics*, 10, 3-40.

FREUDENTHAL, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht: Reidel.

GUTIÉRREZ, A. (1991). La investigación en Didáctica de la Matemática. En *Area de Conocimiento Didáctica de la Matemática*, 149-194. Madrid: Síntesis.

HEID, M.K. (1988). Resequencing skills and concepts in applied calculus using the computer as a tool. *Journal for Research in Mathematics Education*, **19**, 1, 3-25.

JOHNSON, D. (1986). *Using a microcomputer to teach a statistical concept.* Ph. D. University of Minnesota.

KILPATRICK, J. (1988). Change and stability in research in mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 5, 202-204.

KUHN, T.S. (1962). *La estructura de las revoluciones científicas*. México: Fondo de Cultura Económica.

LAKATOS, I. (1981). *Sobre la historiografía popperiana en Matemática, Ciencia y Epistemología*. Madrid: Alianza Editorial.

LEBESGUE, H. (1928). *Leçons sur l'intégration et la recherche de fonctions primitives*. Paris: Éditions Jacques Gabay. (Reimpresión Gauthier-Villars et Cie Éditeurs, 1989)

ORTON, A. (1979). An investigation into the understanding of elementary calculus in adolescents and young adults. *Cognitive Development Research in Science and Mathematics*, 201-215.

–(1983a). Students' understanding of integration. *Educational Studies in Mathematics*, 14, 1-18.

–(1983b). Students' understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics*, 14, 235-250.

SCHNEIDER-GILOT, M. (1988). *Des objets mentaux „aire" et „volume" au calcul des primitives*. Tesis doctoral. Université Catholique de Louvain. Faculté des Sciences. Louvain La Neuve.

SCHUBRING, G. (1985). Essais sur l'histoire de l'enseignement des Mathématiques. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, **5**, 3, 343-385.

–(1987). On the Methodology of Analysing Historical Textbooks: Lacroix as Textbook Author. *For the Learning of Mathematics*, **7**, 3, 41-51.

SHULMAN, L.S. (1986). Paradigms and research programs in the study of teaching: a contemporary perspective. En *Handbook of research on teaching*. M.C. Wittrock (Ed). London: Macmillan.

SIERPINSKA, A. (1985a). La notion d'obstacle épistémologique dans l'enseignement des Mathématiques. *Proceedings of the 37th CIEAEM's Meeting*, 73-93. Leiden.

–(1985b). Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. *Recherches en didactiques de Mathématics*, **6**, 1, 5-67.

–(1987a). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies on Mathematics*, **18**, 4, 371-397.

–(1987b). Trying to overcome epistemological obstacles relative to limits in 17 years old humanities students. *Proceedings of the 38th CIEAEM's Meeting*, 183-193. Southampton.

–(1989). How & when attitudes towards mathematics & infinity become constituted into obstacles in students? *Proceedings of the 13th International Conference PME*, 166-173.

TALL, D. (1985). Understanding the calculus. *Mathematics Teaching*, 110, 49-53.

TALL, D. & VINNER, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.

TURÉGANO, P. (1991). Propuesta didáctica para la integral definida. IV J.A.E.M. Castellón, 20-23 de mayo de 1991. En prensa.

–(1992). Una alternativa a la integral de Riemann, *Ensayos*, 6, 227-233.

–(1993). *De la noción de área a su definición*. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Castilla-La Mancha.

–(1994). *Los conceptos en torno a la medida y el aprendizaje del cálculo infinitesimal*. Tesis Doctoral. Universidad de Valencia.

–(1994). Imágenes del concepto y estrategias que utilizan los estudiantes en la resolución de problemas de áreas. *Ensayos*, 9, 237-257.

–(1997). El aprendizaje del concepto de integral. *Suma*, 26, 39-52.

–(1998). Del área a la integral. Un estudio en el contexto educativo. *Enseñanza de las Ciencias*, **16**, 2, 233-249.

TURÉGANO, P. y PENALVA, C. (1990). Alumnos universitarios ante el infinito: intuición y formalización. *Memorias del Primer Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*, Sevilla, 24-29 de septiembre de 1990.

TURÉGANO, P. et al. (1990). Visualización de relaciones geométricas en el espacio tridimensional mediante representaciones gráficas planas. *Memorias del Primer Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*, Sevilla, 24-29 de septiembre de 1990.

ZAWOJEWSKI. (1986). *The teaching and learning processes of junior high school students under alternative modes of instruction in the measure of central tendency*. Ph. D. Northwestern University.