PROPUESTA METODOLOGICA PARA TRATAR DE SUBSANAR LAS DIFICULTADES DIDACTICAS Y TEORICAS QUE SE OBSERVAN EN LA ADQUISICION DEL CONCEPTO CUALITATIVO DEL AREA

Pilar Turégano Moratalla

Pilar Turégano Moratalla. Licenciada en Ciencias Matemáticas. Profesora Titular de Escuela Universitaria. Albacete.

0. INTRODUCCION

Medir es uno de los tópicos en matemáticas que puede ser considerado como uno de los principales candidatos para sostener el lema "las matemáticas son útiles". A pesar de ello, es de todos conocido que los conceptos relacionados con el "tema medida" tienen graves dificultades didácticas.

Está claro que, tanto desde un punto de vista psicológico-didáctico, como desde un punto de vista teórico, la adquisición de un concepto se sitúa en un plano totalmente distinto al de su cuantificación, claramente, la primera debe preceder a la segunda y representa un nivel de conocimiento más fundamental, pero no por ello más fácil de adquirir.

Piaget, Inhelder y Szminska (1960)[1] nos han proporcionado información muy aclaratoria sobre las etapas que atraviesa el niño en su desenvolvimiento de los conceptos asociados al de área.

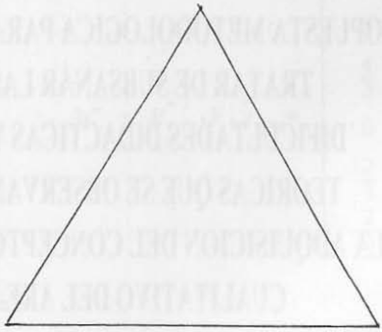
El concepto de área, como afirma H. Freudenthal, es uno de los conceptos más básicos y profundos del discurso matemático.

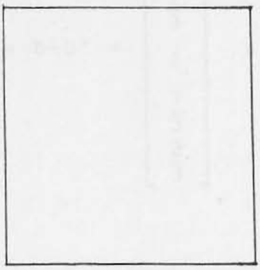
La primera constatación que debe hacerse es que el concepto cualitativo de área se sitúa en un nivel cognoscitivo muy superior al del concepto cualitativo de longitud y su adquisición presente problemas didácticos graves.

---

(1) LOVELL, K.:,*Desarrollo de los conceptos básicos matemáticos y científicos en los niños*, Morata, Madrid, 1977.

Dadas dos figuras planas, un triángulo equilátero y un cuadrado,





podemos preguntarnos cuál es mayor, cuál tiene mayor área. La respuesta, incluso para nosotros, no es intuitivamente evidente. En el caso de las longitudes podíamos recurrir a la comparación directa. No podemos hacer lo mismo con estas figuras pues tienen forma distinta, a pesar de ello, han sido construidas de forma que tengan la misma área. Es decir, "*el concepto de área no depende de la forma*".

Es innecesario remarcar las graves dificultades didácticas surgidas debido a este hecho. Son de gran interés los resultados presentados por K. M. Hart[1] en relación con los test del CSMS, así como los presentados por L. Dickson.[2]

Ambas autoras exponen y analizan la dificultad de conservar de manera consistente el área al producirse desplazamientos y cambios de forma.

Una de las tesis defendidas en este análisis es el hecho de que "*subyacentes a las dificultades didácticas existen, casi siempre, dificultades teóricas no negligibles*". Analicemos pues, desde un punto de vista teórico, el concepto cualitativo de área. No pretendemos definir qué es el área de una superficie –problema cuantitativo– sino "*qué significa que dos superficies tengan la misma área*".[3]

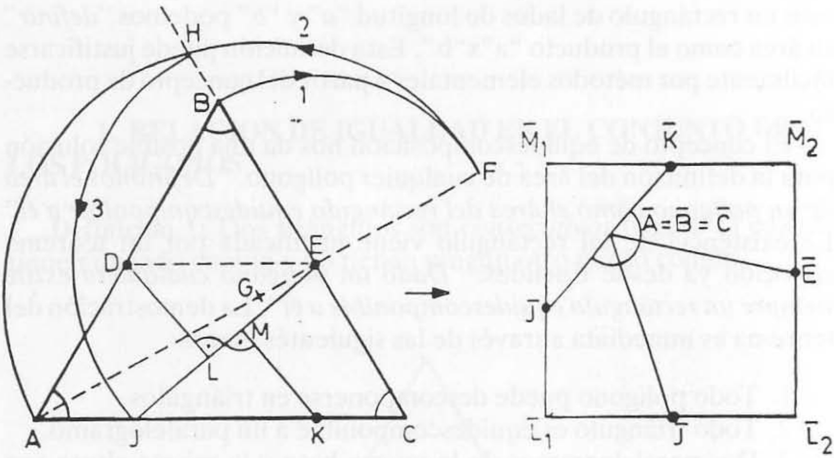
El concepto que resuelve el problema es el de *equidescomposición*: "Dos figuras son equidescomponibles, si es factible descomponer una de ellas en un número finito de partes, los cuales pueden rearreglarse para formar la otra". Este será el concepto de equivalencia que nos permitirá definir cuando dos polígonos tienen igual área: "Dos polígonos tendrán la misma área si son equidescomponibles".

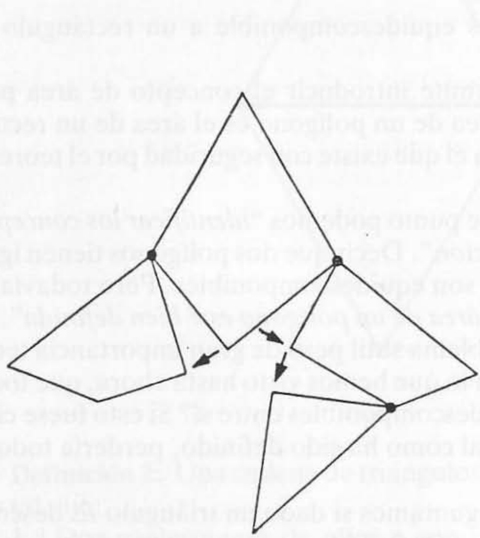
(1 bis) HART, K. M., 1984, *Children's Understanding of Mathematics 11-16*, (John Murray, London).

(2) DICKSON, L., BROWN, M., GIBSON. O., 1984, *Children Learning Mathematics: A Teacher's Guide to recent Research* (alden press Ltd., London).

(3) Toda esta propuesta metodológica está referida al área figuras poligonales.

Observemos que con esta definición no sabemos aún que es el área de un polígono, en cambio podemos saber ya qué significa que dos superficies tengan la misma área. Por ejemplo, el triángulo y el cuadrado anteriores tienen la misma área, son por tanto equidescomponibles: podemos dividir el triángulo en cuatro partes, reorganizadas y obtener el cuadrado tal y como se muestra a continuación.





D punto medio de AB.
E punto medio de BC.
F intersección de la recta AE con el arco de centro E y radio EB.
G punto medio de AF.
H intersección de la recta CB con el arco de centro G y radio AG.
J intersección de la recta AC con el arco de centro E y radio EH.
JK = AD
L y M rectas perpendiculares a EJ por D y K.

Puede demostrarse fácilmente que la relación de equidescomposición es una relación de equivalencia. Por lo tanto, el conjunto de todos los polígonos quedará descompuesto en clases de equivalencia.

Cada clase contiene un polígono y todos los que son equidescomponibles a él. Entre todos los polígonos hay unos para los cuales la cuantificación del área es bastante sencilla: los rectángulos. Si tenemos un rectángulo de lados de longitud *"a"* y *"b"* podemos *"definir"* su área como el producto "a"x"b". Esta definición puede justificarse fácilmente por métodos elementales a partir del concepto de producto.

El concepto de equidescomposición nos da una posible solución para la definición del área de cualquier polígono. "*Definimos el área de un polígono como el área del rectángulo equidescomponible a él*" La existencia de tal rectángulo viene justificada por un teorema conocido ya desde Euclides: "*Dado un polígono cualquiera existe siempre un rectángulo equidescomponible a él*". La demostración del teorema es inmediata a través de las siguientes etapas:

1. Todo polígono puede descomponerse en triángulos.
2. Todo triángulo es equidescomponible a un paralelogramo.
3. Dos paralelogramos de la misma base y la misma altura son equidescomponibles.
4. Todo rectángulo es equidescomponible a un rectángulo de base la unidad.

Este teorema nos permite introducir el concepto de área para todos los polígonos: el área de un polígono es el área de un rectángulo equidescomponible a él que existe con seguridad por el teorema anterior.

Una vez llegados a este punto podemos "*identificar los conceptos de área y equidescomposición*". Decir que dos polígonos tienen igual área significará decir que son equidescomponibles. Pero todavía no podemos afirmar que "*el área de un polígono esté bien definida*".

En efecto, hay un problema sutil pero de gran importancia teórica: ¿Podría suceder según lo que hemos visto hasta ahora, que todos los polígonos fuesen equidescomponibles entre sí? Si esto fuese cierto, el concepto de área, tal como ha sido definido, perdería todo su significado.

Concretando, nos preguntamos si dado un triángulo $\triangle$ descompuesto en $\triangle_1$, $\triangle_2$,..., $\triangle_n$, ¿es posible reorganizar sus partes de tal forma que cubran sólo parcialmente?

Parece claro que la respuesta deber ser negativa, pero no es hecho fácil de demostrar. Recordemos las distintas justificaciones que se han dado a lo largo de la historia: Euclides lo resuelve utilizando que "*el todo es mayor que la parte*", hecho que, desde un punto de vista moderno, no es admisible. En el siglo pasado, algunos geómetras habían considerado la respuesta al problema anterior como axioma. El primero en demostrar realmente la negación de esta posibilidad fue D. Hilbert en el año 1899.

Vemos pues, que hasta 1899 no queda claramente establecido que la definición de un área de un polígono a través de la equidescomposición es un concepto bien definido.

1. RELACION DE IGUALDAD EN EL CONJUNTO DE LOS POLIGONOS

Definición 1: Dos triángulos son *consecutivos* (figura 1) cuando tienen un lado común y no tienen ningún otro punto común.

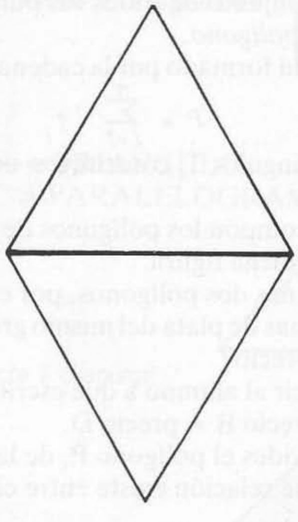


Fig. 1

Definición 2: Una cadena de triángulos es un conjunto de triángulos tal que:

1.º Dos cualesquiera de ellos o son consecutivos o no pueden tener más punto común que un vértice.

2.º Si T y S son dos triángulos no consecutivos de la cadena, existen los triángulos $T_1, T_2, \ldots, T_r$ de la cadena, tales que T y T_1 son consecutivos, T_1 y T_2 son consecutivos..., T_r y S son consecutivos.

Propuesta 1. Di cuales son cadenas y cuáles no en la figura 2.

figura 2.

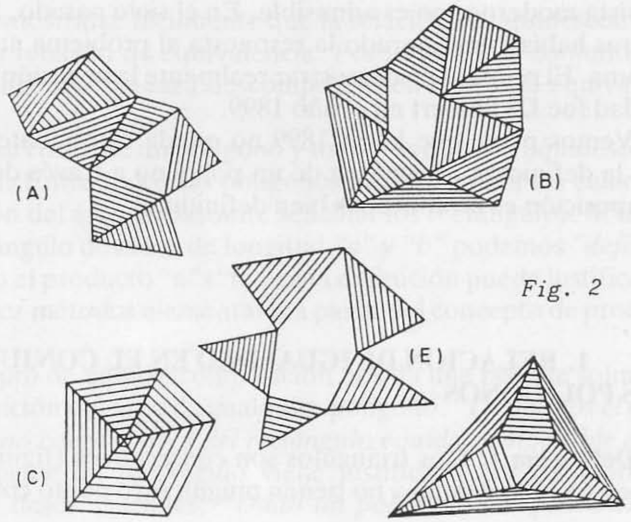


Fig. 2

Definición 3: Al conjunto de todos los puntos de una cadena de triángulos se le llama *polígono*.

Si el polígono P está formado por la cadena de triángulos T_i, i=1, 2..., n, escribiremos: $$P = \sum_{i=1}^{n} T_i$$

y diremos que los triángulos T_i constituyen una *descomposición* de polígono P.

Propuesta 2: Descompón los polígonos de la figura 2 en triángulos distintos de los de dicha figura.

Propuesta 3: Si tienes dos polígonos, por ejemplo el (B) y el (D) de la figura 2, de láminas de plata del mismo grosor, ¿cómo averiguarás si son del mismo precio?

* Queremos inducir al alumno a que escriba la relación de igualdad: B = D $\Longrightarrow$ precio B = precio D.

Propuesta 4: si divides el polígono P, de lámina de plata, en dos polígonos P' y P'' ¿qué relación existe entre el precio de P y los precios de P' y P''?

* Queremos inducir al alumno a que escriba la operación suma: si P = P' + P'' $\Longrightarrow$ precio P = precio P' + precio P''

Propuesta 5: Si suponemos que todos los polígonos son de plata, se pueden clasificar del siguiente modo: dos polígonos P y Q pertenecen a la misma clase cuando colocados en los platillos de una balanza la equilibramos. Demuestra que de este modo se obtiene, efectivamente una partición del conjunto de los polígonos.

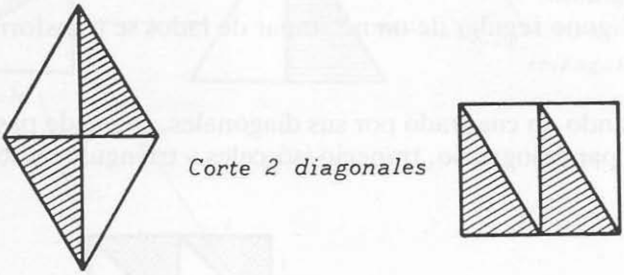
Propuesta 6: Si dos polígonos, P y Q, son iguales, esto es, se pueden superponer mediante un movimiento, ¿pertenecen a la misma clase según la clasificación anterior?

Propuesta 7: Si P y Q se pueden descomponer en el mismo número de triángulos iguales, ¿pertenecen P y Q a la misma clase según la definición anterior?

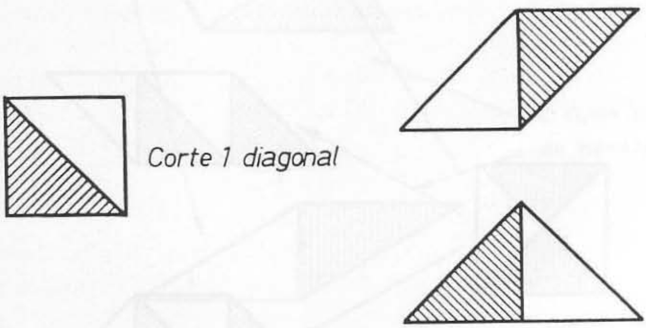
Definición 4: Dos polígonos P y Q pertenecen a la misma clase cuando o son iguales (se pueden superponer) o se pueden descomponer en el mismo número de triángulo iguales. Dos polígonos que pertenecen a la misma clase se llaman *equivalentes o equidescomponibles*. Si el polígono P es equivalente al polígono Q escribiremos: PEQ.

Propuesta 8: Trataremos de hallar polígonos equivalentes a uno dado.

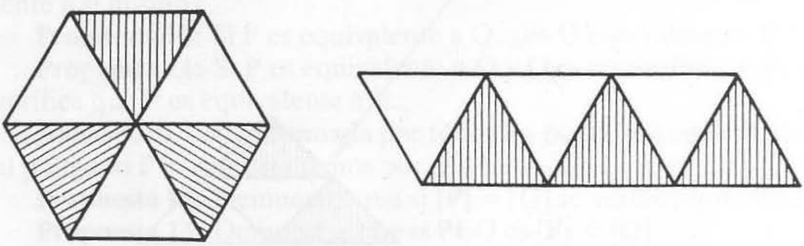
1.º ROMBO ⟶ RECTANGULO



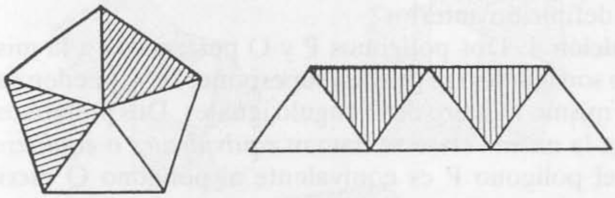
2.º CUADRADO ⟶ TRIANGULO
⟶ PARALELOGRAMO



3.º HEXAGONO REGULAR ⟶ PARALELOGRAMO



4.º PENTAGONO REGULAR ⟶ TRAPECIO

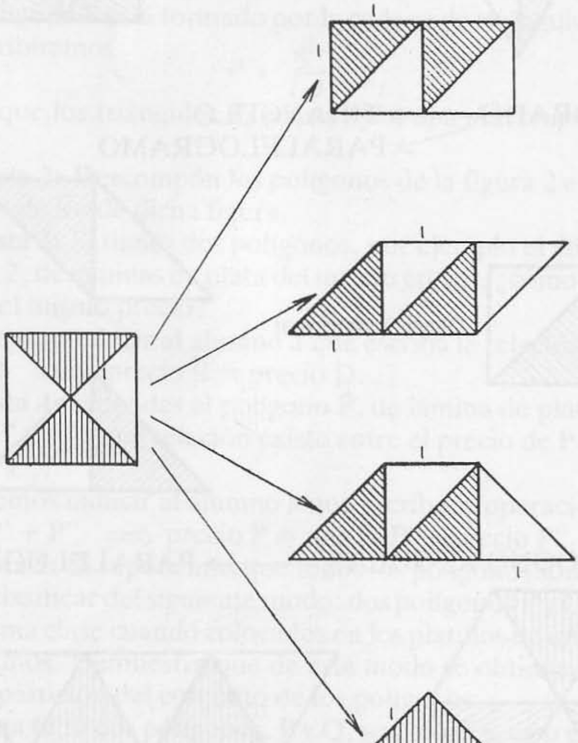


Después de las dos transformaciones anteriores podrías enunciar una regla general.

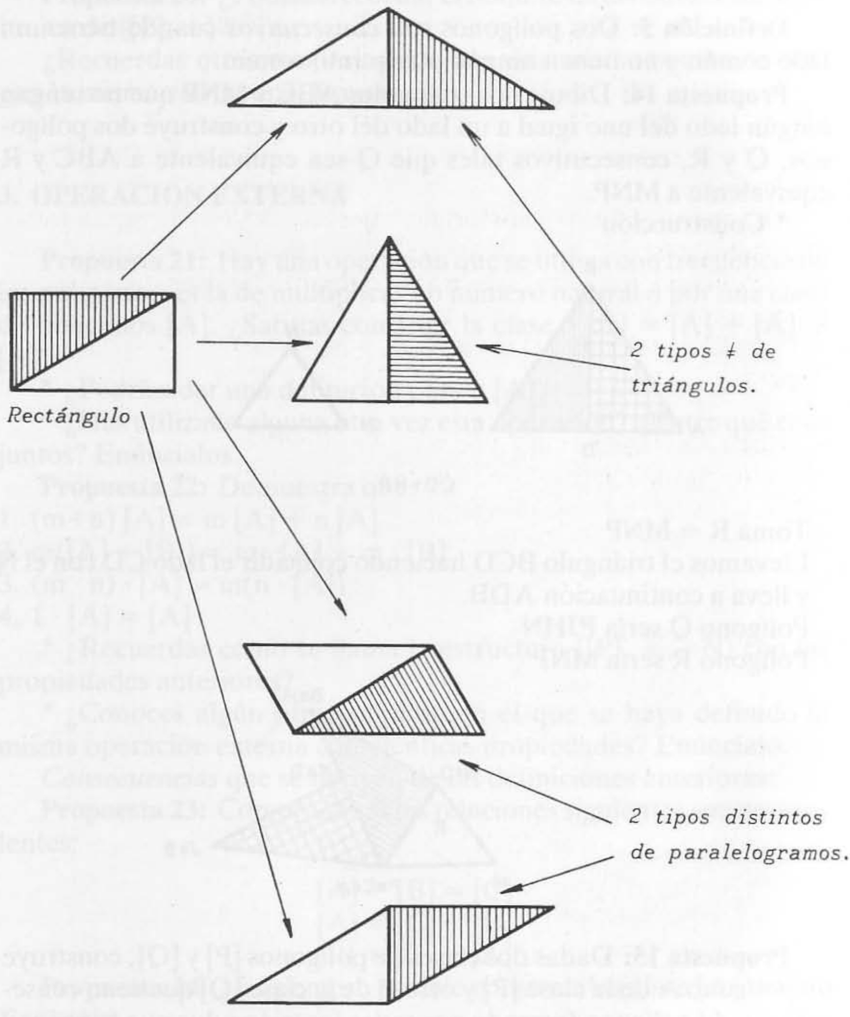
* Polígono regular de un n.º par de lados se transforma en un paralelogramo.

* Polígono regular de un n.º impar de lados se transforma en un trapecio.

5.º Cortando un cuadrado por sus diagonales, se puede pasar a rectángulo, paralelogramo, trapecio isósceles y triángulo también isósceles.



6.º Rectángulo mediante el corte de una diagonal ¿en qué polígonos lo puedes transformar?



Propuesta 9: Según la definición 4. ¿Es todo polígono equivalente a sí mismo?

Propuesta 10: Si P es equivalente a Q, ¿es Q equivalente a P?

Propuesta 11: Si P es equivalente a Q y Q es equivalente a R, se verifica que P es equivalente a R.

Notación: La clase formada por todos los polígonos equivalentes al polígono P lo representamos por [P].

Propuesta 12: Demuestra que si [P] = [Q] se verifica que PEQ.

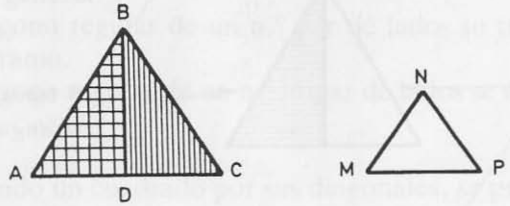
Propuesta 13: Demuestra que si PEQ es [P] = [Q].

2. DEFINICION DE ADICION DE CLASES DE POLIGONOS. PROPIEDADES.

Definición 5: Dos polígonos son *consecutivos* cuando tienen un lado común y no tienen ningún otro punto común.

Propuesta 14: Dibuja dos triángulos ABC y MNP que no tengan ningún lado del uno igual a un lado del otro y construye dos polígonos, Q y R, consecutivos tales que Q sea equivalente a ABC y R equivalente a MNP.

* Construcción

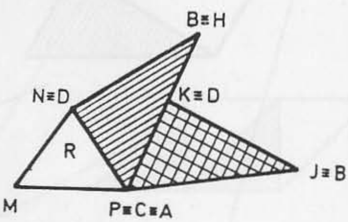


Toma R = MNP

Llevamos el triángulo BCD haciendo coincidir el lado CD con el NP y lleva a continuación ADB.

Polígono Q sería PJHN

Polígono R sería MNP



Propuesta 15: Dadas dos clases de polígonos [P] y [Q], construye un polígono A de la clase [P] y otro B de la clase [Q] que sean consecutivos. Al polígono formado por todos los triángulos que forman el polígono A y el polígono B cuando A y B son dos polígonos consecutivos le llamaremos polígono A + B.

Definición 6: Dados dos clases de polígonos [P] y [Q] se llama *clase suma* de las dos clases, y se representa [P] + [Q] a la clase [A + B] siendo A y B polígonos consecutivos, tales que A [P] y B∈ [Q].

Propuesta 16: recorta dos polígonos P y Q de papel y construye la clase suma de las clases [P] y [Q].

Propuesta 17: Comprueba que la clase suma de dos clases no depende de los polígonos A y B que se empleen para construirla.

Propuesta 18: Demuestra la asociatividad de la adición.
Propuesta 19: Demuestra la conmutatividad de la adición.
Propuesta 20: ¿Podrías recordar el nombre de las estructura algebraica de ([P], +)?

¿Recuerdas otros conjuntos que con esta misma operación tengan la misma estructura? Enuncialos.

3. OPERACION EXTERNA

Propuesta 21: Hay una operación que se utiliza con frecuencia en los polígonos: es la de multiplicar un número natural *n* por una clase de polígonos [A]. ¿Sabrías construir la clase 3 [A] = [A] + [A] + [A]?

* ¿Podrías dar una definición para n [A]?

* ¿Has utilizado alguna otra vez esta operación? ¿Entre qué conjuntos? Enúncialos.

Propuesta 22: Demuestra que:
1. (m+n) [A] = m [A] + n [A]
2. m([A] + [B]) = m · [A] + m · [B]
3. (m · n) · [A] = m(n · [A])
4. 1 · [A] = [A]

* ¿Recuerdas cómo se llama la estructura ([P], +, · N) con las propiedades anteriores?

* ¿Conoces algún otro conjunto en el que se haya definido la misma operación externa con idénticas propiedades? Enúncialo.

Consecuencias que se derivan de las definiciones anteriores:

Propuesta 23: Comprueba si las relaciones siguientes son equivalentes:

$$[A] + [B] = [C]$$
$$[A] = [C] - [B]$$
$$[B] = [C] - [A]$$

Propuesta 24: ¿Es siempre posible construir las clase [A] – [B]? Explícalo

Propuesta 25: Si m › n, demuestra que (m – n) [A] = m [A] – n [A]

Propuesta 26: Si existe [A] – [B] demuestra que m ([A] – [B]) = m [A] – m [B]

4. DEFINICION DE ORDENACION

Propuesta 27: Las relaciones siguientes son equivalentes:

$$[A] < [B] \longrightarrow [A] + [C] = [B]$$

¿Podrías dar un criterio por medio del cual podamos ordenar las clases de polígonos?

Propuesta 28: ¿Podrías demostrar según el criterio que tú hayas dado para ordenar las clases de polígonos, las propiedades que verifican?

Propuesta 29: ¿Es esta relación de orden compatible con la operación de adición que has utilizado con anterioridad?

* ¿Recuerdas otros conjuntos que se hayan ordenado con el mismo "criterio" que éste? Podrías enunciarlos.

Definición 7: En el conjunto de las clases de polígonos se verifica el postulado de Arquímedes: si $[A] < [B]$ existe un entero positivo n que multiplicado por $[A]$ nos de $n[A]$ que es mayor que $[B]$.

Propuesta 30: Comprueba que se verifica el postulado de Arquímedes en el conjunto de las clases de polígonos.

REFLEXIONES

El conjunto de todas las clases de polígonos, entre los que se ha definido la suma que confería a dicho conjunto estructura de semigrupo conmutativo, es un semigrupo absoluto ordenado cancelativo y arquimediano.

$\{[P], +\}$ L. C. I. | SEMIGRUPO ADITIVO
Asociativa |
Conmutativa CONMUTATIVO
$[P] + [Q] = [M] + [Q] \longrightarrow [P] = [M]$ CANCELATIVO
si existe sólo una diferencia de las dos:
$[P] - [Q]$ ó $[Q] - [P]$ ABSOLUTO
si $[A] < [B]$ existe un entero n,
tal que $n[A] > [B]$ ARQUIMEDIANO

Ya hemos definido la magnitud "área" de una forma *cualitativa* en una figura poligonal, pero no *cuantitativamente*. Cada clase de polígonos contiene un polígono y todos los equidescomponibles con él. Entre todos los polígonos de una misma clase, hay uno para el que la cuantificación del área es relativamente sencilla; este polígono es el rectángulo. El problema de calcular el área de un polígono se reduciría a calcular el área de un rectángulo equidescomponible a él. La existencia, para cada polígono, de un rectángulo equivalente a él se conoce ya desde Euclides.

Por lo tanto, podemos identificar los conceptos de área y equidescomponibilidad pero, todavía, no podemos decir que el área de un polígono sea un número bien definido. Hay un problema sutil, pero de gran importancia teórica, y es el siguiente:

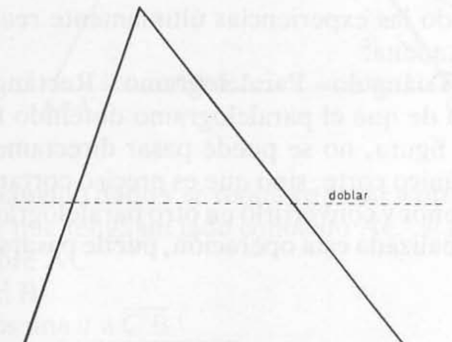
¿Puede suceder que todos los polígonos sean equidescomponibles? La respuesta a esta pregunta llegó después de un largo proceso –Hilbert lo demostró en 1899– y nos permite afirmar que el concepto de área está bien definido.

5. TRANSFORMACION DE UN TRIANGULO EN UN RECTANGULO EQUIVALENTE A EL Y CON BASE LA UNIDAD. CALCULO DEL AREA DE UN TRIANGULO EXPERIMENTALMENTE

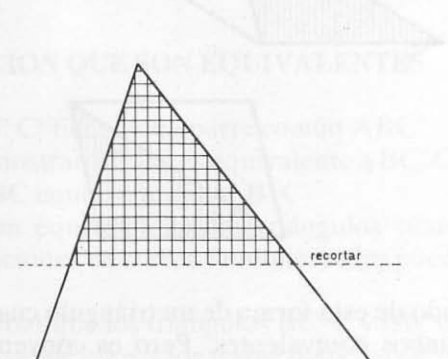
Propuesta 31: Recorta un triángulo de papel y, mediante doblados, cortes y uniones, transfórmalo en un rectángulo equidescomponible con él.

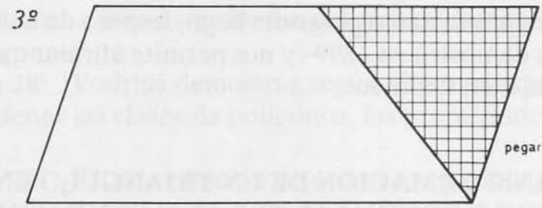
SECUENCIAS

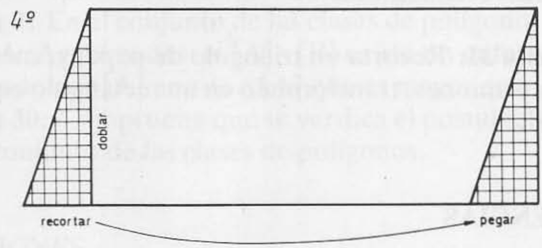
1º



2º



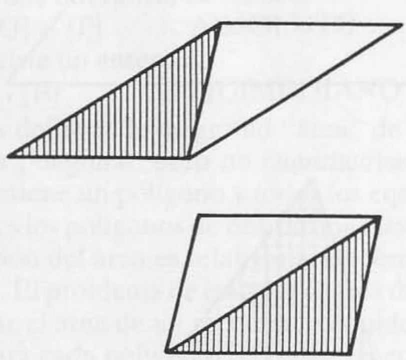




Resumiendo las experiencias últimamente realizadas, se puede establecer la cadena:

Triángulo – Paralelogramo – Rectángulo

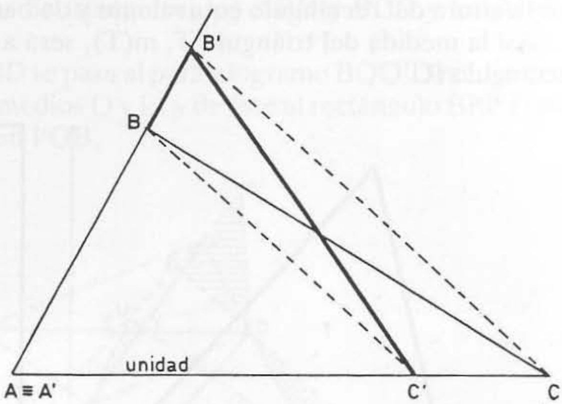
En el caso de que el paralelogramo obtenido fuese de la forma que indica la figura, no se puede pasar directamente a rectángulo mediante un único corte, sino que es preciso cortar previamente por la diagonal menor y convertirlo en otro paralelogramo menos alargado. Una vez realizada esta operación, puede pasarse a la transformación anterior.



Se ha pasado de esta forma de un triángulo cualquiera dado a un rectángulo, ambos equivalentes. Pero es conveniente llegar, partiendo del mismo triángulo, no a un rectángulo cualquiera, sino a uno que tenga como base la unidad, es decir, un segmento fijado de antemano. Puede considerárselo como la unidad, ya que basta establecerlo con esa condición.

Propuesta 32: Dibuja un triángulo cualquiera y trata de obtener otro equivalente a él, que tenga un lado fijo que se considera como la unidad.

*** CONSTRUCCION**



Sea ABC el triángulo dado y se requiere pasar a otro equivalente A' B' C' al dado y que tenga un lado conocido AC' = unidad.

Se fija $\overline{AC'}$ sobre AC

Unimos C' con B

Por C trazamos una // a $\overline{C'B}$

B' es el punto donde corta la recta anterior a la prolongación de $\overline{AB}$.

Este punto B' es el tercer vértice del triángulo transformado.

DEMOSTRACION QUE SON EQUIVALENTES

ABC y el A' B' C' tienen una parte común ABC'

Habrá que demostrar BC' B' es equivalente a BC' C para tener la certeza de que ABC equivalente a A' B' C'

– Pero sólo son equivalentes dos triángulos cuando mediante ciertas transformaciones de cortes y uniones se les puede hacer coincidir.

– Para comprobar que los triángulos BC' C y BB' C' son equivalentes, hay que pasar de ellos a los respectivos paralelogramos, y de éstos, a los rectángulos.

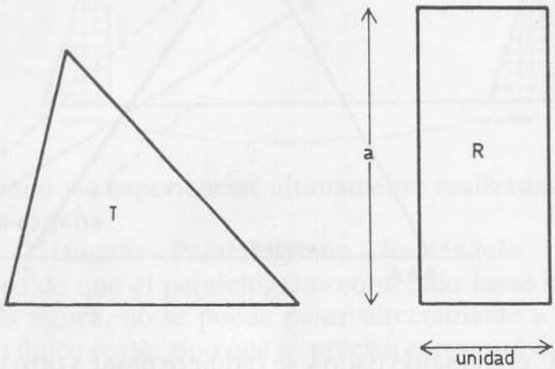
Una vez realizada la operación, se comprueba la equivalencia de un modo sencillo y experimental por coincidencia.

CONCLUSION

Se asocia, por lo tanto, a un triángulo cualquiera un rectángulo de base la unidad. Como son equivalentes, la medida del triángulo es la misma que la del rectángulo. Pero como éste tiene un lado, su base, que vale la unidad, su medida es el número que le corresponde al otro lado, su altura.

Por lo tanto, la medida del triángulo, su área, viene determinada por la altura del rectángulo equivalente y de base la unidad.

Así la medida del triángulo T, m(T), será a, que es la altura del rectángulo R.



REFLEXION

Se presenta ahora el problema de comprobar que el área que se acaba de definir cumple con las condiciones establecidas al principio, las características fundamentales en la estructura del conjunto de las magnitudes: Relación de igualdad y Operación de adición.

A los triángulos, o en general polígonos, iguales deben corresponder áreas iguales, y a un polígono, que puede descomponerse en partes, le corresponde un área que es la suma de todas las áreas de sus partes.

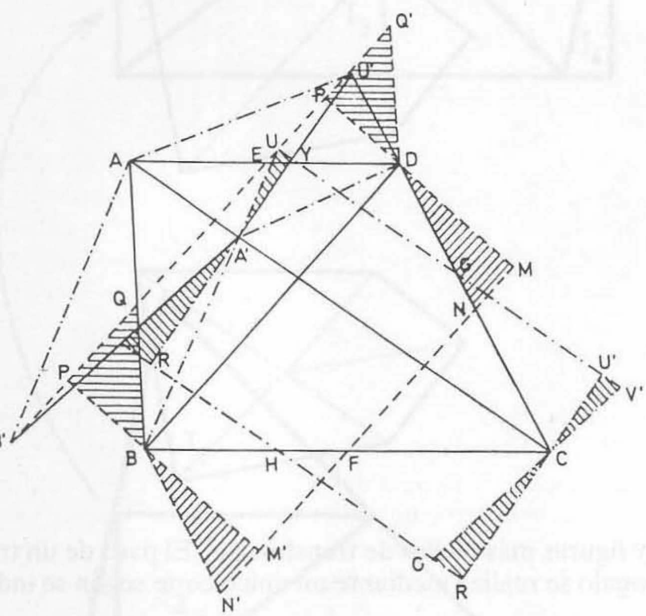
Interesa, por lo tanto, destacar, y hay que comprobar, que en el paso de un triángulo cualquiera a un rectángulo, se cumple que si dos triángulos son iguales, los rectángulos correspondientes también han de ser iguales. Y que el rectángulo correspondiente a un polígono cualquiera es siempre el mismo, sea cual fuere la descomposición en triángulos que de él se haga.

Esta experiencia, que el paso de T, y en general de P, a R es único, sea cual fuere la descomposición del polígono en triángulos tiene una parte más difícil de ver.

El modelo más elemental es el paso de cuadrilátero convexo a rectángulo, mediante las dos descomposiciones sucesivas en triángulos cortando por las dos diagonales. Las dos posibles descomposiciones según las dos diagonales conduce a dos pares de triángulo. Una vez que han sido transformados en triángulos de igual base, se pasa a sus correspondientes rectángulos de igual base. Y se comprueba por superposición que la suma de las alturas de los correspondientes a la primera pareja es igual a la suma de las alturas de los correspondientes a la segunda.

El cuadrilátero ABCD se descompone según sus diagonales AC y BD, en dos parejas de triángulos, los ABD y BCD y los ABC y ADC.

Del triángulo ABD se pasa al paralelogramo BQQ'D mediante el corte por los puntos medios Q y E, y de éste al rectángulo BPP'D por la unión de P' Q' D en PQB.



Del triángulo BCD, por medio del corte por los puntos medios N y F, se pasa al paralelogramo DNN'B y finalmente al rectángulo DMM'B.

Del triángulo ADC se pasa al triángulo A' D' C', que tiene como base A' C, de la misma longitud que la diagonal BD. Después al paralelogramo A' VVC y luego al rectángulo A' UU' C.

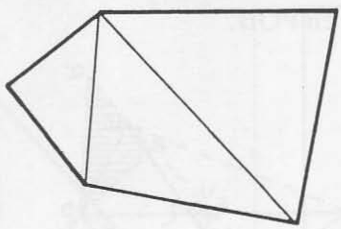
Del mismo modo se pasa del triángulo ABC al A' B' C', luego al paralelogramo A' S' SC, y luego, por fin, al rectángulo A' R' RC.

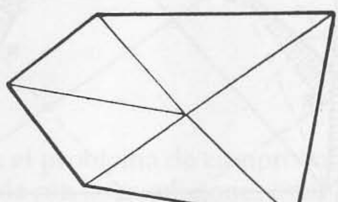
Sumando los rectángulos BPP'D y DMM'B se obtiene el rectángulo PP'MM', que es igual al RR'UU', que se obtiene sumando los rectángulos A'UU'C y RR'A'C'.

Se comprueba la igualdad de lo mismo porque al superponerlos coinciden.

Por lo tanto, al cuadrilátero ABCD le corresponde un mismo número en las dos posibles descomposiciones.

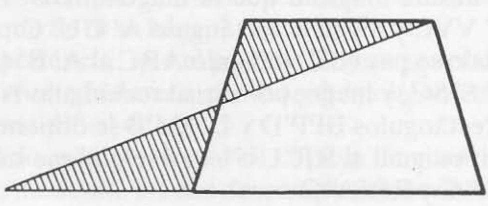
* Esta experiencia puede generalizarse para cualquier tipo de polígonos, y comprobar idénticos resultados. La dificultad de materialización va aumentando con el número de lados. Puede verificarse con un pentágono cualquiera descomponiéndolo de dos maneras distintas; por ejemplo, como queda indicado en la figura. Se llegaría a comprobar que la medida es idéntica en los dos casos.





Hay figuras más fáciles de transformar. El paso de un trapecio a un triángulo se realiza mediante un único corte según se indica en la figura.

Para pasar de un polígono regular de un número par de lados, se procede como para el hexágono pasando a un paralelogramo, y cuando el número de lados es impar, de la misma forma que para el pentágono, pasando a un trapecio



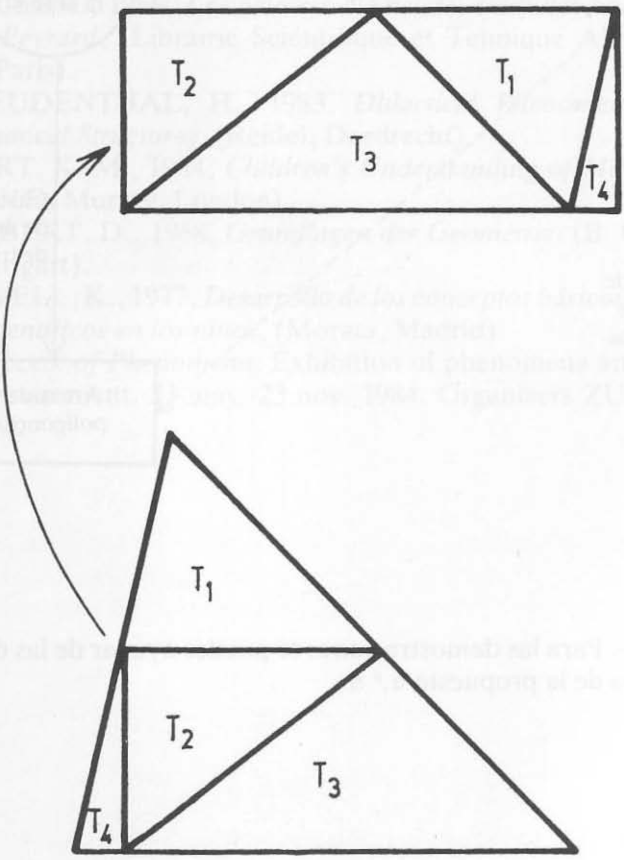
GENERALIZACION

Si un triángulo o, en general, un polígono es suma de varios triángulos.

$$P = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$$

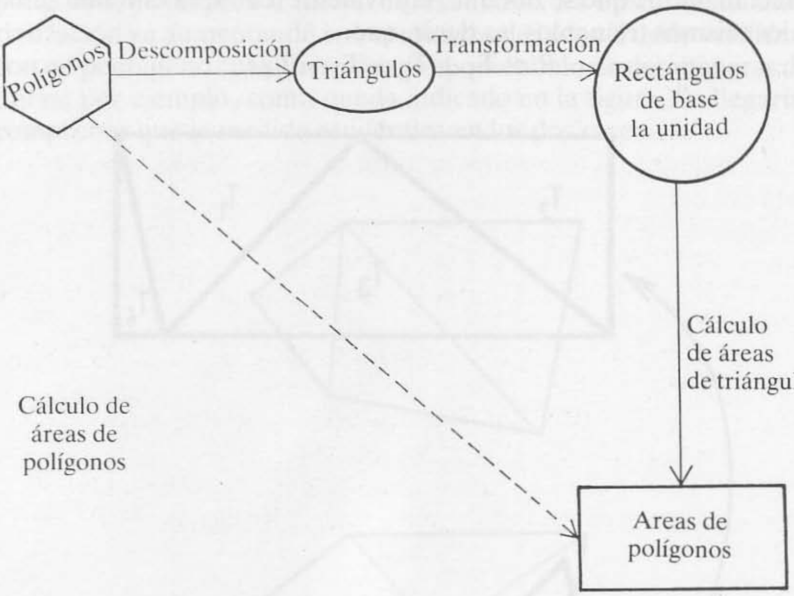
el rectángulo R que se obtiene, equivalente a P, será también suma de los mismos triángulos, es decir, que:

$$R = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$$



Toda esta teoría y estas experiencias se ha visto que pueden generalizarse para cualquier polígono, ya que todos ellos se pueden descomponer de un modo sencillo y elemental en triángulos. De estos triángulos se pasa a los correspondientes de base unidad y de éstos a los rectángulos. Como la base de todos ellos es la unidad, la suma de las medidas de los triángulos, que es la suma de las alturas de todos estos rectángulos, será la medida, el área del polígono inicial.

El organigrama siguiente nos resume el proceso



Nota.– Para las demostraciones te puedes ayudar de las descomposiciones de la propuesta n,º 8.

0. Introducción.
1. Relación de igualdad en el conjunto de los polígonos.
2. Definición de adición de clases de polígonos. Propiedades.
3. Operación externa.
4. Definición de ordenación.
5. Transformación de un triángulo en un rectángulo equivalente a él y con base la unidad. Cálculo del área de un triángulo experimentalmente.

BIBLIOGRAFIA

BOLTYANSKII, V. G., 1973, *Figuras equivalentes y equidescomponibles*, (Limusa Wiley, S.A., México).

CELA, P., 1973, *Areas de figuras poligonales y circulares*, (C.S.I.C., Tomo 6, Madrid).

DICKSON, L., BROWN, M., GIBSON, O., 1984, *Children Learning Mathematics: A Teacher's Guide to Recent Research*, (alden Press, Ltd., London).

EUCLIDE, 1966, *Les oeuvres d'Euclide, traduites littéralement par F. Peyrard*, (Librairie Scientifique et Tehnique Albert Blanchard, Paris).

FREUDENTHAL, H., 1983, *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, (Reidel, Dordrecht).

HART, K. M., 1984, *Children's Understanding of Mathematics 11-16*, (John Murray, London).

HILBERT, D., 1968, *Grundlagen der Geometrie*, (B. G. Teubner, Stuttgart).

LOVELL, K., 1977, *Desarrollo de los conceptos básicos matemáticos y científicos en los niños*, (Morata, Madrid).

The book of Phenomena. Exhibition of phenomena and riddles of the enviroment. 23-may.-23 nov. 1984. Organizers ZURCHER FORUM.