IMÁGENES DEL CONCEPTO Y ESTRATEGIAS QUE UTILIZAN LOS ESTUDIANTES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE ÁREAS

Pilar Turégano Moratalla

Pilar Turégano Moratalla es Doctora en Ciencias Matemáticas y Profesora Titular en la Universidad de Castilla-La Mancha.

1. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

SE pretende, por una parte, indagar cuáles son las «imágenes del concepto»(1) que con más frecuencia evocan los estudiantes al referirse al área, y, por otra, analizar las estrategias que ponen de manifiesto cuando se enfrentan a problemas y cuestiones sobre áreas que no son los habituales en la enseñanza.

2. MUESTRA

La población de estudio está constituida por tres cursos de primero de BUP pertenecientes a tres institutos de Albacete, y cuyos estudiantes provienen de más de 20 centros distintos de EGB.

3. METODOLOGÍA

Se les administró un cuestionario estructurado en 4 bloques –cuyo contenido presentamos en el cuadro 1– y una cuestión abierta –¿Qué es el área de una superficie?– con el fin de indagar cuáles son las imágenes que con más frecuencia evocan los estudiantes al referirse al área. Una vez corregidos los cuestionarios, se seleccionaron 27 de los 89 estudiantes que componían la muestra mediante un análisis factorial de correspondencias, siendo entrevistados a continuación. Del análisis

(1) Traducción adoptada del término *concept-image* acuñado por Tall y Vinner (1981).

CUADRO 1.

BLOQUE	Problemas	CONTENIDO/DIFICULTAD
I ÁREA COMO MAGNITUD AUTÓNOMA	1	Transformación de un cuadrado en otros polígonos. Concepto de polígono. Congruencia.
	2	Proceso reversible del anterior. Equidescomposición.
	3	Duplicación del área del cuadrado. Equicomplementación.
	4	Transformación de un triángulo en un rectángulo. Equidescomposición.
	5	Descomposición en figuras más sencillas. Confusión área/perímetro.
II COMPARACIÓN DEL ÁREA CON OTRA MAGNITUD	6	Relacionar área con otra magnitud. Figuras de distinta forma: rectilíneamente limitadas y no. Igual área.
	7	Relacionar área con otra magnitud. Establecer proporcionalidad.
III INFINITESIMALES E INDIVISIBLES	8-11	División de la figura en partes infinitesimales.
	9	Indivisibles de Cavalieri. Cortar la figura por planos paralelos.
IV EXHAUSCIÓN	10	Agotamiento de la figura de acuerdo con una unidad de medida. Relación inversa del tamaño de la unidad con el área

de la audición y transcripción de las entrevistas obtuvimos las conclusiones.

4. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS POR BLOQUES EN EL CUESTIONARIO ESCRITO

Bloque I. Área como magnitud autónoma

A este bloque pertenecen los 5 primeros problemas del cuestionario. El **primero** de ellos está, a su vez, dividido en dos partes: la primera pide polígonos que se puedan formar con los cuatro triángulos en que queda dividido un cuadrado al cortarse por sus diagonales, y la segunda la relación que existe entre las áreas de todos esos polígonos.

La tabla 1 muestra las categorías de respuesta para la primera pregunta del primer problema y los porcentajes hallados para cada una de ellas.

Los polígonos que los estudiantes dibujan con más frecuencia son paralelogramos y triángulos. Todos ellos utilizan para la descomposi-

TABLA 1.

CATEGORÍA DE RESPUESTA	INS 1	INS 2	INS 3
Puede dibujar 4 polígonos	9,1	2,7	20
Puede dibujar menos de 4 polígonos	41	48,7	50
No dibuja o dibuja mal	27,2	43,2	23,3
Dan otras respuestas	22,7	2,7	6,7
No contesta	0	2,7	0
	22	37	30

ción criterios visuales, y también todos ellos «rompen» el cuadrado para recomponer la nueva figura.

Hacemos notar estas dos estrategias de resolución, ya que, con este mismo cuestionario, estudiantes universitarios habían utilizado procedimientos algebraicos para determinar figuras con área igual a otra dada y habían tratado de reconstruir sobre la figura dada.

En la segunda pregunta del primer problema se les pide que capten la conservación del área de diversos polígonos formados todos ellos por los mismos cuatro triángulos.

Las categorías de respuesta y resultados obtenidos quedan reflejados en la tabla 2.

TABLA 2.

CATEGORÍA DE RESPUESTA	INS 1	INS 2	INS 3
Áreas iguales	72,7	62,2	66,7
Áreas desiguales. Otras respuestas	0	8,1	23,3
No contesta	27,3	29,7	10
	22	37	30

Los estudiantes no suelen dibujar más de dos polígonos. En principio, ello se puede interpretar como que la cuestión no le dice cuántos, pero en las entrevistas nos daremos cuenta de que presentan grandes dificultades para dibujar más de dos. Todos aquellos que han dibujado más de cuatro polígonos reconocen la igualdad del área, así como también muchos de los que han dibujado uno o dos. Se da también el caso de los que no son capaces de dibujar ninguno, pero reconocen que tendrían la misma área.

En el **problema 2** se les facilita un triángulo para que determinen por dónde habría que cortarlo para formar con las piezas resultantes un cuadrado. Es el proceso reversible del anterior.

Los resultados obtenidos son los que presentamos en la tabla 3.

TABLA 3.

CATEGORÍA DE RESPUESTA	INS 1	INS 2	INS 3
Descompone bien el triángulo y dibuja cuadrado	36,4	46	33,3
No dibuja o dibuja mal	54,5	46	50
No contesta	9,1	8	16,7
	22	37	30

No todos los estudiantes que dibujaron un triángulo en el problema anterior fueron capaces después de pasar del triángulo al cuadrado. Pensamos que los estudiantes no asocian este problema con el proceso de reversibilidad del anterior. Es un problema muy complicado en el que además no se les da la descomposición del triángulo en otros triángulos.

El **problema 3** es el problema clásico de duplicar el área del cuadrado, es decir, la búsqueda de un segmento cuya medida exprese el lado del cuadrado de doble superficie. Para Szabo (1977), la duplicación del cuadrado ha sido el punto de partida del descubrimiento de la inconmensurabilidad lineal. Se les facilitó el cuadrado descompuesto en cuatro triángulos por sus diagonales.

Las categorías de respuesta y los resultados los presentamos en la tabla 4.

TABLA 4.

CATEGORÍA DE RESPUESTA	INS 1	INS 2	INS 3
Dibuja bien sin cálculos algebraicos	27,3	35,1	13,3
Dibuja bien con cálculos algebraicos	0	2,7	10
No dibuja o dibuja mal	68,2	56,8	63,4
No contesta	4,5	5,4	13,3
	22	37	30

Todos los que dibujan bien el nuevo cuadrado lo hacen sobre la figura que se les da, complementándola en cada lado con un triángulo, lo que equivale a tomar la diagonal del cuadrado como lado del nuevo cuadrado de área doble. Son muy pocos los estudiantes que utilizan un procedimiento algebraico para determinar la medida del lado del nuevo cuadrado, en oposición a los estudiantes universitarios, en que esta estrategia de resolución es la más utilizada (Turégano, 1993).

El error más común cometido por los estudiantes que lo hacen mal es duplicar el lado del cuadrado dado, con lo que cuadriplicarían el área, hecho que lleva implícito el suponer que la razón de áreas es igual a la razón de lados.

En el **problema 4** se piden las transformaciones que se deben hacer en un triángulo dado para obtener un rectángulo de igual área.

Son muy pocos los estudiantes –como se puede observar en la tabla 5– que resuelven bien este problema. Los que así lo hacen utilizan el procedimiento de dividir por el punto medio de los lados (trazando la paralela media), cortando el triángulo superior y añadiéndolo a uno de los lados para formar un paralelogramo del que cortan un triángulo para añadirlo al otro lado y formar así un rectángulo.

TABLA 5.

CATEGORÍA DE RESPUESTA	INS 1	INS 2	INS 3
Forma bien sin cálculos algebraicos	4,6	10,8	10
Forma bien con cálculos algebraicos	4,6	10,8	3,3
No lo forma o lo forma mal	72,7	43,2	66,7
No contesta	18,1	35,2	20
	22	37	30

Intervienen aquí estrategias visuales, cambio de posición y disposición de las partes. Aditividad del área. Finalmente, la conservación del área después de varias operaciones.

Los estudiantes que utilizan métodos algebraicos igualan la fórmula que les permite calcular el área del triángulo con la del rectángulo. Solamente los que toman como base del rectángulo la base el triángulo son capaces de resolver correctamente.

Este problema ha causado muchas dificultades de los estudiantes.

En el **problema 5** se trata de ver si el estudiante distingue entre área y perímetro y si posee estrategias para determinar esas magnitudes y cuáles son. Los resultados los presentamos en la tabla 6.

Nos parece alarmante el porcentaje de estudiantes que es incapaz de triangular este polígono, así como el de los que dejan sin resolver. Pensamos que es un problema relativamente fácil para que no sea resuelto por la mayoría de los estudiantes. Esto indica, a nuestro entender, un aprendizaje descuidado donde solamente se calculan áreas de polígonos regulares mediante una fórmula.

TABLA 6.

CATEGORÍA DE RESPUESTA	INS 1	INS 2	INS 3
Triangula desde un vértice e indica bien cuál es el área y el perímetro	9	13,5	0
Triangula desde un punto interior e indica bien cuál es el área y el perímetro	4,6	0	3,3
Realiza otro tipo de descomposiciones e indica bien cuál es el área y el perímetro	23,7	16,2	13,3
Confunde área y perímetro	0	5,4	3,3
No da indicaciones o las da mal de cómo calcular el área y el perímetro	36,4	46	46,7
No contesta	22,7	18,9	33,4
	22	37	30

Bloque II. Comparación del área con otra magnitud

Constituyen este bloque los **problemas 6** y **7**, en los que se pide a los estudiantes que reconozcan si hay conservación o no del área de figuras de distintas formas recortadas en láminas de plata del mismo grosor y de igual peso (problema 6) o distinto peso (problema 7).

Los resultados obtenidos quedan reflejados en las tablas 7 y 8, respectivamente, de acuerdo con las categorías establecidas.

TABLA 7.

CATEGORÍA DE RESPUESTA	INS 1	INS 2	INS 3
Áreas iguales con razonamiento correcto	40,9	48,6	56,7
Áreas iguales con razonamiento incorrecto	0	2,7	3,3
Áreas desiguales o no se puede saber	40,9	29,7	33,3
No contesta	18,2	19	6,7
	22	37	30

TABLA 8.

CATEGORÍA DE RESPUESTA	INS 1	INS 2	INS 3
Da la relación corecta	13,6	0	3,3
Da una realción incorrecta o no la da	36,4	70,3	63,3
No contesta	50	29,7	33,4
	22	37	30

En las entrevistas observamos que estos problemas –en concreto el 7– no eran tan difíciles como aparecen a la luz de los resultados; en el momento en que la entrevistadora les facilita la expresión «regla de tres», todos los estudiantes entrevistados llegan a establecer la relación. Es, indudablemente, una respuesta forzada. La igualdad de pesos es admitida por más del 50% de los estudiantes como un criterio válido para establecer la igualdad de áreas cuando todas las otras cualidades de los objetos permanecen constantes. No era ésta la finalidad del problema, sino la de comprobar si se admite que figuras rectilíneamente limitadas y otras curvilíneas pueden tener la misma área, y para ello nos servimos de otra magnitud.

Bloque III. Infinitesimales e indivisibles

En el **problema 8** se pide dibujar un triángulo de igual área que un círculo dado.

Los resultados de este problema (tabla 9) eran casi de esperar, ya que entraña una gran dificultad, pero nos pareció interesante, como todos los relacionados con descomposiciones infinitesimales, para analizarlo con más detenimiento en las entrevistas.

TABLA 9.

CATEGORÍA DE RESPUESTA	INS 1	INS 2	INS 3
Dibuja bien el triángulo sin cálculos algebraicos	0	2,7	0
Dibuja bien el triángulo con cálculos algebraicos	4,6	10,8	3,3
No lo dibuja o lo dibuja mal	72,7	54,1	76,7
No contesta	22,7	32,4	20
	22	37	30

Aquí empezamos a darnos cuenta de que las descomposiciones infinitesimales, bien de la misma dimensión o de una dimensión menor que la figura original, no son evocadas por los estudiantes de forma espontánea. Nos parece interesante proponerles estos problemas que hagan aparecer las limitaciones de los procesos utilizados clásicamente en geometría para determinar áreas y hacerles recurrir a los procesos infinitos, para estudiar sus primeras intuiciones sobre los infinitesimales.

El **problema 9** hace referencia a un cilindro de cartón sin tapas y a las distintas figuras obtenidas al realizar cortes diferentes en el cartón y desarrollarlo para reconocer la conservación del área.

En la tabla 10 presentamos las distintas categorías de respuestas. En otras respuestas hemos reunido aquellas justificaciones que hacen referencia a otras cualidades distintas del área, tales como «que tienen la misma base» o «que todas forman cilindros», respuestas que eran de esperar, puesto que la cuestión no pedía de forma explícita el reconocimiento del área. Como es obvio, la igualdad del área la justifican mediante el recorte/pegado («quito este trozo de aquí [...] y lo pego allí [...]»), nunca haciendo alusión a justificaciones que tengan que ver con el principio de Cavalieri.

TABLA 10.

CATEGORÍA DE RESPUESTA	INS 1	INS 2	INS 3
Da bien la relación del área y dibuja alguna figura más	18,2	27,1	26,7
Da bien la relación del área y no dibuja más figuras o las dibuja mal	31,8	32,2	23,4
No da relación del área o la da mal	4,5	2,7	3,3
Otras respuestas	45,5	37,8	43,3
No contesta	0	0	3,3
	22	37	30

La primera parte del **problema 11** muestra el *green* del hoyo 16 de un determinado campo de golf y se pregunta al estudiante si conoce algún procedimiento para medirlo.

Solamente un estudiante del total de la muestra utiliza el cuadriculado para medir el área. Predomina en algunos de ellos la imposibilidad de calcular el área de figuras que no están rectilíneamente limitadas.

TABLA 11.

CATEGORÍA DE RESPUESTA	INS 1	INS 2	INS 3
Conoce procedimiento y es correcto	4,5	2,7	13,3
Cuadricula la figura para calcular el área	0	0	3,4
Hace referencia al área pero no conoce procedimiento para calcularla o es incorrecto	18,2	16,2	10
Hace referencia a medir el perímetro	9,1	24,3	13,3
Da una fórmula	0	2,7	0
Otras respuestas	36,4	13,5	40
No contesta	31,8	40,6	20
	22	37	30

No remiten a descomposiciones infinitesimales como las utilizaba Kepler, que era algo natural –al menos desde nuestro punto de vista–, ni a la cuadrícula, ya que este problema lo podríamos considerar apropiado para medirlo por exhausción, pues a ello invita el facilitarles su representación gráfica.

Bloque IV. Método de exhausción

En el **problema 10** se pide al estudiante que reconozca la relación inversa del área con la unidad de medida elegida, haciéndole notar en el enunciado que existen ladrillos de distintas formas y tamaños.

Todos hacen alusión a ladrillos cuadrados y reconocen la relación inversa entre la medida del área y la unidad de medida, eligiendo ladrillos grandes. Estos resultados contrastan con el hecho de que no sepan dar indicaciones de cómo calcular el área, ya que el propio enunciado induce a la utilización de la cuadrícula. En las tablas 12 y 13 recogemos los resultados de estas cuestiones.

TABLA 12.

CATEGORÍA DE RESPUESTA	INS 1	INS 2	INS 3
Elige ladrillos grandes	36,4	73	70
Elige ladrillos pequeños	0	5,4	6,7
Da otras respuestas	31,8	18,9	13,3
No contexta	31,8	2,7	10
	22	37	30

TABLA 13.

CATEGORÍA DE RESPUESTA	INS 1	INS 2	INS 3
Da indicaciones de cómo calcular el área de la figura y del ladrillo	0	0	3,3
Da indicaciones de cómo calcualr el área de la figura	0	0	0
Área de la piscina dividida por el área del ladrillo	9,1	24,3	10
Otras respuestas	40,9	62,2	70
No contesta	50	13,5	16,7
	22	37	30

5. IMÁGENES MÁS FRECUENTES ASOCIADAS AL CONCEPTO DE ÁREA

En esta pregunta abierta se ponen de manifiesto, una vez más, las dificultades lingüísticas que afectan a la claridad y al rigor de las definiciones.

Los estudiantes se han expresado de una manera muy confusa empleando un vocabulario muy poco preciso. En muchos casos da la impresión de que tienen alguna imagen del concepto de área pero que no saben expresarla con palabras.

En un análisis cualitativo de las respuestas obtenidas en las definiciones, se pueden determinar varias categorías que engloban las imágenes de concepto que más comúnmente emplean estos estudiantes para referirse al área. Dos de ellas están perfectamente definidas:

- «medida de una superficie» (38,2%);
- «extensión que ocupa una superficie» (39,3%).

Los primeros asocian el área con su aspecto «cuantitativo»; los segundos, con su aspecto «cualitativo». El 77% de los estudiantes pertenece a estas dos categorías.

Otras categorías menos representadas engloban distintas imágenes del área:

- asocian el área con una fórmula: el área es l^2 (6,7%);
- asocian el área sólo con figuras rectilíneamente limitadas: superficie comprendida dentro de un perímetro recto (4,5%);
- otras (11,3%).

Los resultados de la última pregunta del cuestionario (tabla 14) ponen de manifiesto una imagen del concepto de área asociada con la forma de la figura. En las entrevistas nos daríamos cuenta de que ésta no es la situación real.

El alto porcentaje de N/C a esta pregunta –que se puede considerar fácil– nos hace pensar en diferentes motivos ajenos a la dificultad,

TABLA 14.

CATEGORÍA DE RESPUESTA	INS 1	INS 2	INS 3
Reducen con la misma forma	45,5	56,8	83,3
Reducen con otra forma	9	5,4	6,7
Otras respuestas	18,2	2,7	3,3
No contesta	27,3	35,1	6,7
	22	37	30

como pueden ser factores de inseguridad, cansancio, falta de interés. Todos estos factores influyen en los estudiantes que no tienen la respuesta inmediata o segura.

6. Análisis de las respuestas de los estudiantes en las entrevistas realizadas

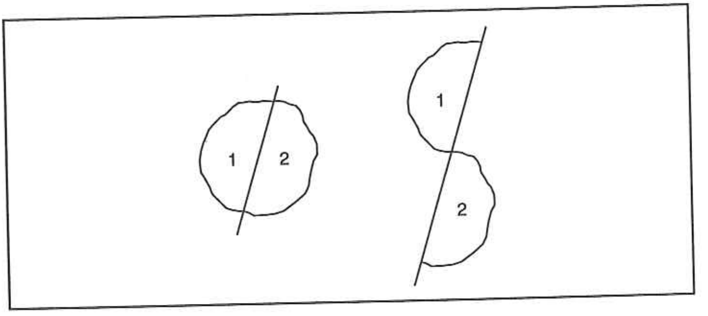
Comentamos dos entrevistas que nos parecen interesantes en cuanto que ponen de manifiesto las imágenes asociadas al concepto e área de dos estudiantes ([C75] y [C69]) que se encuentran a nivel de razonamiento totalmente distinto.

Bloque I. Área como magnitud autónoma. Teoría de congruencia

E. ¿Cómo has conseguido dibujar estos polígonos?
[C75] Me imaginaba los cuatro triángulos y les daba vueltas hasta que me encajaban.
E. ¿Qué me puedes decir del área de todos los polígonos?
[C75] Que es la misma.
E. Trata de explicarme por qué.
[C75] Está muy claro, si tengo siempre los mismos cuatro triángulos.
E. Pero cómo los has puesto de otra forma...
[C75] Da igual.
E. Y el perímetro ¿será igual?
[C75] ... ¿Tiene que ser?
E. Trata de pensar en ello.
[C75] ... [Mira las figuras que ha dibujado.] No, ésta [señalando el cuadrado] tiene menos que ésta [señalando el triángulo].
E. Me has dibujado varios polígonos de distinta forma y con distinto perímetro y me has dicho que todos tienen igual área, y eso está bien. ¿Podrías decirme, entonces, qué es el área?
[C75] ... El espacio que está delimitado por unas rectas que se cortan en unos vértices.
E. [Le dibujo una región no rectilínea limitada, y le pregunto:] ¿Qué piensas tú de esta figura? ¿Puede tener área?
[C75] ¡Anda! ¡Claro! [Señala bien con el dedo.]
E. Bien, pero esta figura no tiene rectas que se juntan en vértices...
[C75] Si, pero yo lo decía por las de antes [refiriéndose a los polígonos].
E. Ya me lo imaginaba. Vamos a tratar, entre los dos, de dar otra definición que nos sirva para todas las figuras, ¿te parece?
[C75] ¡Vamos!
E. Volvemos a analizar los distintos polígonos: distinta forma, distinto perímetro, igual área...
...
[C75] ¿Puede ser lo que tienen igual?

(No es una respuesta inmediata, sino inducida por las preguntas de la investigadora, ni tampoco muy precisa.)

E. Sí, sí. Muy bien. Pero, ¿sigues pensando en los polígonos?
[C75] Sí, pero me parece que sirve para todo. [Parte la región que yo le dibujé, y dibuja otra figura uniendo esas partes, como se muestra a continuación]



... Sale una figura fea, pero su área es la suma de las áreas [señala las dos partes] y es igual al área total. Si cambias las partes de sitio, el área es igual.

Comprobamos un dominio total del concepto de área como magnitud: hace alusión a los cambios de posición y disposición de las partes y a la aditividad.

Pasamos a relatar las explicaciones dadas en las restantes cuestiones de este bloque.

E. Muéstrame cómo hiciste este problema.
[C75] Es que, si antes tenían un cuadrado y he formado un triángulo, ahora lo hago al revés [Problema 2].

Observamos dominio de la reversibilidad. Pero hay muy pocos estudiantes –dos de toda la muestra– que, de entrada, consideran que este problema es reversible del anterior.

[C75] Le tengo que añadir otros 4 triángulos para que el área sea doble, y, probando con la imaginación... [Problema 3].

Utiliza sus cualidades de visualizador, aparte de las propiedades del área, así como también el criterio de equicomplementación.

Al referirnos al problema 4, se expresa como sigue:

E. Trata de explicarme...
[C75] No sé. Es muy difícil explicarlo.
E. Sí, sí lo es, pero tú puedes intentarlo.
[C75] Te lo puedo explicar con la imaginación.
E. Muy bien. Hazlo.
[C75] ... Le corto un trozo arriba y lo pongo a un lado y entonces es casi un rectángulo. Para sacar un rectángulo se le corta un poco a un lado y se lleva al otro.
E. Muy bien.

Es curioso cómo recurre al modelo mental. Parece que el dibujo sobre el papel le turba, produciendo inseguridad.

Veamos cómo se expresa al referirnos al problema 5:

E. ¿Recuerdas cómo obtuviste esta respuesta?
[C75] Para el abono el área, y para la valla el perímetro.
E. Bien, pero es que ellos no saben determinar ni el área ni el perímetro. Tú les tienes que explicar cómo se hace.
[C75] Con un metro miden el perímetro y el área... No sé una fórmula...
E. ¿No conoces ninguna?
[C75] Sí la del rectángulo, la del triángulo...
E. Basta. Con algunas de ellas podrás.
[C75] ... [Piensa largo rato, pero nunca mirando el papel]... ¿Puedo hacer triángulos?
E. Sí, ¿por qué no?
[C75] Puede hacer 4 y luego sumo las cuatro áreas. [Descompone bien triangulando desde un vértice.]

Bloque II. Comparación del área con otra magnitud

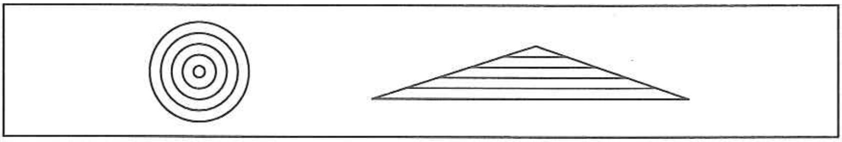
[C75] Tiene la misma área.
E. ¿Cómo has llegado a esta solución?
[C75] Porque pesan igual y todo lo demás es igual.

La igualdad de pesos se impone a sus sentidos con mucha fuerza en muchos de los estudiantes debido a su asociación con figuras concretas, incluso en los que, para escribir la proporcionalidad tiene que ser a través de una regla de tres.

Bloque III. Infinitesimales e indivisibles

E. No obtuviste ninguna respuesta para este problema.
[C75] Me suena a chino. [Problema 8]
E. Piensas que pueda haber un triángulo que tenga la misma área que un círculo?
[C75] Sí. Figuras de lados rectos y curvas pueden tener la misma área.
E. Tú, que tienes tanta imaginación, piensa en muchos, muchos círculos concéntricos en los que los radios se escalonan de *o* a *r*.
[C75] ¡Infinitos!
E. Bien, déjame seguir. Imagínate que efectuamos un corte rectilíneo desde el borde hasta el centro. ¿Lo ves?
[C75] Sí
E. Ahora te imaginas que lo vamos estirando capa a capa. ¿Ves un triángulo?
[C75] Sí... es raro... tiene un lado muy largo...
E. Ese triángulo, ¿tendrá la misma área que el círculo?
[C75] ¡Claro! ¡Si no le hemos quitado nada!

Observamos cómo, a pesar de la descomposición infinitesimal, que él entiende y es capaz de visualizar, su justificación ataña a «toda la figura»; no la pierde de vista.



Estas dos superficies compuestas de indivisibles iguales dos a dos tienen, pues, la misma área, los indivisibles se van formado con las longitudes de las circunferencias, pudiéndose establecer una correspondencia uno a uno que justifica la igualdad de áreas.

Analicemos los argumentos esgrimidos en el problema 9:

[C75] El área, porque el cilindro es el mismo y lo que cortamos en un lado lo ponemos en otro.
E. Muy bien, Pensemos en otro procedimiento a ver qué te parece. (Le explico el principio de Cavalieri.)
[C75] ... Pero es más fácil pasar de una figura a otra cortando.
E. ¿Por qué?
[C75] No sé. Siempre veo la figura.
E. Aquí, también. Lo único que haces es desplazar hacia la derecha o la izquierda segmentos...

Otra vez justificaciones en base a toda la superficie: cambio de forma, pero sin perder de vista toda la figura. Justificaciones en base a la magnitud, al recorte-pegado.

En el método de Cavalieri, lo único que utilizamos es una estricta correspondencia biunívoca entre los elementos de dos configuraciones. No hay ningún proceso de aproximación continua ni omisión de términos.

El problema vuelve a ser el de la heterogeneidad de las dimensiones: ven el área como «suma» de indivisibles de un orden menor, y, al ser segmentos, no tienen área.

Bloque IV. Exhausción

E. ¿Cómo obtuviste tu respuesta?
[C75] Pensé que cuadrados quedaba más bonito.
E. Bien, pero el problema no te pedía que dijeras eso, sino cómo deberían ser los ladrillos para resultar más económico...
[C75] Ya...
E. ¿Y?
[C75] ¿Grandes?
E. Bien. ¿Cómo determinaríamos los que hacen falta?
[C75] ... Si pudiese saber el área de la piscina y la del ladrillo, los divido...
E. Bien. ¿Lo puedes calcular?
[C75] ... Ni idea...
E. Trata de recordar si has calculado aproximadamente el área de una figura de esta forma.
[C75] ¡Nunca!
E. ¿No has utilizado cuadrícula?

[C75] ¿Qué es eso?

...

E. Ya sabes lo que es la cuadrícula, pero podemos utilizar otros métodos para hallar el área.

[C75] ¿Recortando?

E. Sí, podría ser. Te voy a contar otro a ver qué tal. [Triángulo desde un punto interior.]

[C75] Pero siempre falta o sobra un poco para ser un triángulo.

E. Sí, efectivamente. ¿Crees que puede llegar un momento en que haya triángulos tan finos que no ocurra eso?

[C75] ... Ya no serían triángulos... serían como los radios de un círculo...

E. Muy bien. El área sería entonces el límite de la suma...

[C75] ... Pero, ¿qué área? si los radios no tienen área...

Aparece otra vez el mismo problema: pasar a los «radios» antes de sumar las áreas de los triángulos.

Se pretende que el estudiante efectúe el «paso al límite» a nivel de la percepción visual de la magnitud en donde los triángulos se estrechan hasta convertirse en segmentos, pero su imaginación parece estar encerrada en un dilema: si sumo las áreas de los triángulos, siempre me falta o sobra; si los convierto en segmentos, ya no tengo área.

A la primera pregunta del problema 11 y al 12 responden así:

[C75] ... No me decían que tenía que hallar el área.

E. Te pedían que la midieras.

[C75] La he medido por el borde.

E. Sí, pero tenías que medir el *green*...

[C75] Sí, pero no sabía. ¡Como decía medir...!

E. Un área también se mide...

[C75] Sí, pero se pone en el problema.

La palabra «medir» no es utilizada en los diferentes contextos con el significado propio de lo que significa en cada uno de ellos. Al parecer, la palabra «medir» queda definitivamente asociada a la longitud. Tiene que ver con las actividades de la escuela en que «se miden» longitudes y «se calculan» áreas.

Confunde área/perímetro sólo por esa palabra, ya que tiene muy claro qué es el área y qué el perímetro.

Veamos cómo responde otro estudiante al problema 10:

E. Te voy a contar otro método a ver cómo te parece. [Triángulo desde un punto interior.]

[C69] Así no va a salir exacto.

E. No. ¿Cómo crees que podríamos conseguir mejores aproximaciones del área: con triángulos más grandes o más pequeños?

[C69] ... A ver... Creo que más pequeños.

E. Si quisiéramos hallar el área exacta, ¿cuántos triángulos tendríamos que hacer?

[C69] Infinitos.

E. Está bien. Continúa...

[C69] Sí, pero ya no serían triángulos, se juntan los lados.

E. No importa. «Llenarían» toda la figura.

[C69] Sí, eso lo veo, pero...
E. ¿Qué pasa?
[C69] Que, entonces, ¿cómo sacamos el área, si ya no hay triángulos?

Observamos, tanto en esta entrevista como en la anterior y en muchas más que las descomposiciones infinitesimales no son privilegiadas, ya que no hay separación neta entre la percepción que tienen los estudiantes de las magnitudes y las propiedades de sus medidas. La idea de que una magnitud se compone de añadidos sucesivos de indivisibles estaría en el origen de esta confusión.

Citamos, a continuación, ciertos párrafos de la **entrevista realizada al estudiante [C66]** que se pueden considerar como representativos de los estudiantes que no han conseguido adquirir el concepto de área.

E. ¿Cómo has conseguido dibujar estos polígonos [Problema 1]
[C66] Dibujándolos.
E. Pero, ¿has tenido en cuenta los 4 triángulos en que se descomponía el cuadrado?
[C66] No, los he pintado y luego pinto las rayas y se hacen los triángulos.
E. ¿Qué relación hay entre las áreas de todos los polígonos?
[C66] ... Todos tienen área...
E. Sí, pero, ¿es igual o distinta?
[C66] ... Distinta.
E. ¿Podrías decirme qué es el área?
[C66] Esto de aquí. [Señala el interior de cada polígono-]
E. Si has formado con los 4 mismos triángulos cada uno de los polígonos...
[C66] ... Yo no he hecho eso...
E. Pero se puede hacer así, ¿no crees?
[C66] ... se podrá...

Le recortamos 4 triángulos de papel y se los damos para que construya polígonos.

[C66] [Forma un rombo y un triángulo después de muchos esfuerzos.]
E. ¿No piensas que tienen la misma área?
[C66] ... No. Ésta tiene ésta [sañala el interior del rombo], y éste ésta [señala el interior del triángulo]

Manifiesta una concepción del área ligada a la forma.

No utiliza la propiedad aditiva del área. Sólo admite que figuras determinadas tienen área, lo que se manifiesta en su concepto más primitivo ligado a la extensión.

En los problemas 6 y 7 pone de manifiesto el aspecto cuantitativo del área, ligado siempre a una fórmula. Ni siquiera la igualdad de los números le permite afirmar la igualdad del área. Para él solamente pueden tener igual área todas las regiones de igual forma y de la misma extensión.

E. ¿Por qué piensas tú que no tienen la misma área?
[C66] Porque esto [señala el interior del rectángulo] es distinto de esto [señala el interior de la figura en forma de caja].

E. Con objeto de provocar un conflicto le pongo un clásico problema de calcular el área de un rectángulo de base 8 cm y altura 4 cm, y un triángulo de base 16 cm y altura 4 cm.

[C66] $8 \cdot 4 = 32$ [No pone unidades.]

$$\frac{16 \cdot 4}{2} = 32$$

Sí, en números es igual.

E. Entonces, será igual, ¿no?

[C66] No, porque la del triángulo la saco con la fórmula «base por altura partido por dos» y la del rectángulo la saco con la fórmula «base por altura».

En las preguntas planteadas en el problema 10 pone en evidencia la imposibilidad de calcular el área de figuras no rectilíneamente limitadas.

[C66] No tiene área.

E. [Le señalo la superficie] Entonces, ¿qué es esto?

[C66] El área.

E. ¿Entonces?

[C66] No tiene área exacta.

E. ¿Qué quieres decir?

[C66] No hay fórmulas. Sólo son de triángulos rectángulos y figuras normales...

E. ¿Te cuento cómo podríamos calcularla?

[C66] ¡Si no se puede!

E. Si tú conoces la fórmula para calcular el área del triángulo, pues la aprovechamos. Descomponemos en triángulos desde un punto interior y luego sumamos el área de cada triángulo y obtenemos el área de la figura. [Toda la descomposición en papel]

[C66] Si eso fueran triángulos, sí podría ser, pero le falta o le sobra para ser un triángulo...

...

Para que una fórmula tenga sentido para el estudiante tiene que construir una imagen del concepto de área como una región de la que puede hablar antes de asignarle un número.

Pensamos que la única conservación real del área es a través de movimientos dinámicos no rígidos de la figura, y eso sólo se consigue construyendo el área como magnitud antes de asignarle un número.

Admite por primera vez la aditividad del área. Pensamos que es porque en esta pregunta sólo se utiliza el pensamiento figurativo y no el operativo, que es el que debe utilizar al romper y pegar.

No es éste el único estudiante que admite la imposibilidad de calcular el área de figuras no rectilíneamente limitadas. No todos los expresan igual.

[C86] ... no tiene área definida.

7. CONCLUSIONES

A partir del análisis interpretativo realizado en la audición y transcripción de las entrevistas, hemos llegado a la conclusión de que los estudiantes utilizan **tres imágenes distintas del concepto de área** concordantes con niveles distintos de razonamiento, y en los que encajan todos los estudiantes entrevistados, y que hemos designado con los apelativos de **primitiva**, **operativa** y **descriptiva**, con el significado que el Diccionario de la Lengua de la Real Academia Española atribuye a estas palabras. Las dos primeras palabras ya habían sido utilizadas en otro contexto (Azcárate, 1990).

El cuadro siguiente nos muestra la distribución de estudiantes entrevistados de acuerdo con la imagen manifestada con respecto al concepto de área:

PRIMITIVA	A39	A40	A54				7	25,9%
	B4	B7						
	C66	C86						
OPERATIVA	A41	A42	A50	A51	A53	A59	18	66,7%
	B14	B16	B19	B21	B30	B36		
	C65	C69	C74	C76	C82	C84		
DESCRIPTIVA	B31						2	7,4%
	C75							
							27	

• Un estudiante manifiesta una imagen **primitiva** del área si sólo admite la noción de área que está caracterizada por una concepción por parte del entendimiento humano de las formas espaciales en lo referente a su extensión. A veces, llega un poco más lejos, asignando un número a un determinado polígono (generalmente, triángulo o rectángulo) como medida de su área obtenida por medio de una fórmula.

Podemos hablar de estudiantes con una imagen primitiva **geométrica** ligada a la extensión y con una imagen primitiva **numérica** ligada a una fórmula, no siendo excluyente estas imágenes en un mismo estudiante.

Las características a destacar en estos estudiantes son las siguientes:

- admitir que las superficies rectilíneamente limitadas tienen área;
- que el área depende de la forma de la superficie, y, por lo tanto, su medida viene determinada por una fórmula;
- no admitir la congruencia de superficies con distinta forma;

- imposibilidad de admitir que se puede determinar el área de superficies no rectilíneamente limitadas.

Estos estudiantes utilizan el término «área» como sinónimo de extensión, y, por consiguiente, lo despojan de su sentido matemático perfectamente definido.

Al referirnos al área como magnitud, estos estudiantes sólo ponen en juego el pensamiento perceptivo, de ahí su imposibilidad para admitir la igualdad de áreas en dominios que se derivan de otro por el cambio de posición o disposición de sus partes. Sus imágenes de concepto contienen conflictos potenciales.

• Un estudiante pone en evidencia una imagen **operativa** del área si alcanza el concepto de área, y, por tanto, asigna propiedades a la noción, pero no da una descripción explícita de qué entiende por área junto con sus propiedades, que ni siquiera menciona, pero que usa correctamente.

Utiliza la palabra «área» en dos sentidos: unas veces para significar una cantidad física; otras veces, como medida de esa cantidad. Así, el «área» es «la superficie comprendida dentro de un perímetro», o bien, «un área de 4 m^2», donde la palabra «área» significa «la medida del área es».

Las características a destacar en estos estudiantes son las siguientes:

- admitir la igualdad de áreas para superficies de distinta forma, estén o no rectilíneamente limitadas;
- conservación del área mediante el cambio de posición o disposición de sus partes;
- utilización de la propiedad aditiva y transitividad;
- admitir la posibilidad de poder asignar un número a cualquier superficie, aunque no conozca procedimiento para hacerlo.

Estos estudiantes, que son capaces de manipular las imágenes para transformarlas en otras, ponen en juego el pensamiento operativo.

Los estudiante que manifiestan esa imagen del concepto de área no presentan factores de conflictos potenciales.

• Un estudiante tiene una imagen **descriptiva** del área si es capaz de describir por medio del lenguaje qué entiende por área ligándolo a sus propiedades que puede nombrar, además de utilizar correctamente.

Estos estudiantes, al igual que los anteriores, no se cuestionan la existencia del área. Parten de que hay algo que llamamos área y que todos tenemos una idea clara de ella, y que, al medirla, le asignan un número, bien con un proceso finito o infinito, según el caso. En el supuesto de los procesos infinitos que se emplean en el cálculo de áreas, es evidente en ellos que deben converger, puesto que el área existe y el área es el límite.

Las características de estos estudiantes son las siguientes:

- dan una descripción verbal del área como lo que es común a todos los dominios derivados de un único dominio con el cambio de posición y disposición de las partes que le pertenecen (congruencia de áreas);
- hablan de la propiedad aditiva y de la transitividad;
- hablan de asignar un número a cualquier dominio, esté o no rectilíneamente limitado, y conozcan o no un procedimiento para calcularla.

Hay una notable diferencia entre los estudiantes **descriptivos** y los **operativos**, además de la de poder explicar verbalmente qué entienden por área y asociarle unas propiedades, y es que los primeros consideran el área como la «clase de equivalencia» de todas las superficies que tienen la misma área, y los segundos consideran el área como la «superficie» comprendida dentro de un perímetro de una forma individualizada, no siendo esto óbice para que reconozcan la congruencia de diversas superficies cuando se les pregunta sobre ello.

Aunque esta última clasificación, basáda en las entrevistas realizadas, es esperanzadora si la comparamos con los resultados del cuestionario escrito, existe un 25,9% de estudiantes que presentan una imagen primitiva del área que es preocupante a estos niveles de aprendizaje.

En cuanto a las estrategias utilizadas, los resultados más relevantes son los siguientes:

1. Los estudiantes tienen dificultad para utilizar mentalmente el recorte-pegado como estrategia para pasar de un polígono a otro. Sin embargo, cuando se trata de reconocer la igualdad de áreas entre polígonos de distinta forma o con otras regiones, el recorte-pegado se revela como uno de los métodos mejor aceptados por los estudiantes. Este método lleva implícito el reconocimiento de la conservación del área y de la propiedad aditiva.
2. Los estudiantes no recurren al cuadriculado para determinar el área de una región rectilínea o curvilínea, pero sí son capaces de utilizar correctamente la relación inversa del área con la unidad de medida.
3. Constatamos la falta de estrategias para resolver problemas de áreas, aunque esto no impide a los estudiantes utilizar correctamente el área de forma operativa, lo que pone en evidencia un aprendizaje descuidado.
4. Los cortes laminares por planos paralelos o descomposiciones infinitesimales de las superficies no son procedimientos evocados espontáneamente para el cálculo de áreas por los estudian-

tes, ni en el caso de figuras rectilíneamente limitadas ni curvilíneas. Quizá esto se debe a tener que romper con la imagen que tienen del área como espacio que hay que cubrir.

5. La imposibilidad de «ver» un área como límite de una suma de infinitesimales tiene su origen en que «pasan» al indivisible de una dimensión menos antes de sumar las áreas, y en el paso al límite les «desaparece» el área. Esto pone en evidencia que el cálculo de un área bajo una curva definida por una función crearía problemas al tratar de remitir a los indivisibles de longitud $y = f(x)$.
6. Se observa en los estudiantes un empleo tácito del infinitesimal como algo muy pequeño pero distinto de cero. En este caso concreto, puede considerarse como una excrecencia de su percepción. Indudablemente que estas primeras intuiciones sobre los infinitesimales están ligadas a los infinitesimales del análisis no-estándar.

REFERENCIAS

AZCÁRATE, C. (1990): *La velocidad: introducción al concepto de derivada*. Tesis Doctoral. Universitat Autonoma de Barcelona.

SZABO, A. (1977): *Les débuts des mathématiques grecques*. Paris: Librairie Philosophique J. Vrin.

TALL, D. & VINNER, S. (1981): «Concept image and concept definition in mathematics, with particular reference to limits and continuity». *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.

TURÉGANO, P. (1993): *Estrategias que utilizan los estudiantes en la resolución de problemas de áreas. Actas del IV Congreso Internacional sobre la Investigación en la Didáctica de las Ciencias y las Matemáticas*. Barcelona, 13-16 de septiembre de 1993, 353-354.