

UNA INTERPRETACIÓN DE LA FORMACIÓN DE CONCEPTOS Y SU APLICACIÓN EN EL AULA

Pilar Turégano

Pilar Turégano, E.U. Magisterio
Plaza Universidad, 3 - 02071 Albacete
e-mail: pilar.turegano@uclm.es

RESUMEN

Después de una breve justificación en la que se aboga por una didáctica con fundamentos teóricos, se presenta un modelo que intenta describir determinados componentes de los procesos que, globalmente, tienen que ver con el aprendizaje o la enseñanza de las matemáticas en general y de la geometría en particular. Se analizan los componentes psicológicos de los estudiantes puestos en juego durante el aprendizaje haciendo una clara distinción entre la definición del concepto y la imagen del concepto. Para concluir, se muestra parte del material elaborado por la autora para introducir el concepto de polígono basado en la aplicación del modelo Vinner.

Palabras clave: definición del concepto, imagen del concepto, adquisición del concepto y fundamentos teóricos.

ABSTRACT

After a brief justification in which I defend a kind of didactics based on strong theoretical components, I present a model which attempts to describe certain components of the processes which, globally, intervene in the learning or teaching of mathematics in general and of geometry in particular. I analyse the psychological components which come into play during the learning process, making a clear distinction between concept definition and concept image. To conclude, I present part of the material I prepared to introduce the concept of polygon based on the application of the Vinner model.

Key words: concept definition, concept image, concept acquisition and theoretical fundamentals.

1. DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA: DISCIPLINA CIENTÍFICA Y ACADÉMICA

Yo soy un hombre de acción. Y tú, un teórico. Tenemos que unirnos.
La teoría y la práctica compadre. Pondremos en marcha a este pueblo y no habrá quien lo pare. Haremos grandes cosas.

Vargas Llosa

En estos tiempos de reforma de la educación se impone la reflexión, pero también la toma de decisiones que consideremos acertadas para lle-

var a la práctica la nueva formación matemática que deben recibir los estudiantes, basada en la idea de que saber matemáticas significa hoy hacer matemáticas, y que es, mediante la resolución de problemas, el razonamiento, la comunicación, las conexiones, la investigación y la exploración, como los estudiantes llegan a saber matemáticas.

Es evidente que la reforma educativa en vigor, propuesta hace ya más de quince años en la LOGSE (MEC, 1989), trata de enfocar de una manera diferente el conocimiento matemático que los estudiantes de educación infantil, primaria y secundaria deben adquirir. La propuesta norteamericana (NCTM, 2003) hace recomendaciones en el mismo sentido.

Esta circunstancia implica automáticamente un cambio en la formación matemática de los futuros profesores, ya que el nuevo papel que, como profesores, deben asumir consiste en diseñar situaciones didácticas⁽¹⁾ y utilizar programas de ordenador, materiales didácticos, etc., que reflejen **el proceso de construcción del concepto, y no sólo del concepto.**

En esta línea de trabajo podemos enmarcar la teoría desarrollada por un grupo de investigadores israelíes encabezados por Vinner acerca de la formación de conceptos matemáticos, en general, y de conceptos geométricos, en particular, que nos puede ser muy útil como marco de referencia para desarrollar nuestros programas de formación de maestros.

El método de trabajo en el aula, por la idiosincrasia de nuestros centros, se convierte en contenido que ha de ser aprendido, ya que los maestros van a enseñar como a ellos se les ha enseñado, no como se les ha dicho que deben enseñar.

Este modelo pertenece a la clase de modelos que hacen más hincapié en el aprendizaje que en la enseñanza, y permite analizar los componentes psicológicos de los estudiantes que entran en juego durante el aprendizaje.

Hace ya cuatro décadas que la Didáctica de las Matemáticas se convirtió en una disciplina académica, y son muy diversas las rutas seguidas para la consecución de sus objetivos; algunas, incluso, totalmente divergentes.

La asignaturas que tienen que ver con las Matemáticas y su Didáctica que se imparten en las Escuelas Universitarias de Magisterio tienen una base teórica; no son únicamente asignaturas de tipo práctico, como muchos profesores creen. En los programas, se han de incluir, por tanto, contenidos teóricos de las Matemáticas que conforman el currículo de Educación Infantil y Primaria así como las teorías de aprendizaje y los modelos de razonamiento que la investigación en esta área ha puesto sobre la mesa. No sería una auténtica didáctica la que prescindiera de los fundamentos científicos y se basara solamente en artículos de difu-

(1) Llamamos "situaciones didácticas" a aquellas situaciones de enseñanza en las que se trazan trayectorias que van desde los distintos campos del saber (Matemáticas, Psicología, Pedagogía, Epistemología) hacia un problema específico de enseñanza de la Matemática. (Glaeser, 1981)

sión u opinión y en la presentación de recursos didácticos. Hoy en día, una enseñanza de calidad tiene que recurrir a la investigación y sus resultados. El hecho de hacer las cosas sin formalismo no implica la realización de tareas inconexas, sin ninguna fundamentación teórica.⁽²⁾ Indudablemente, no hay nada más práctico que una buena teoría.

El objeto de la Didáctica de la Matemática se encuentra en la encrucijada de muchas otras disciplinas: Sociología, Psicología, Antropología, Pedagogía, Epistemología y Matemáticas. Por tanto, analizar cualquier problema de enseñanza-aprendizaje, bien sea desde la investigación bien sea desde la docencia, implica tener en consideración todas ellas. Sólo después de una visión de conjunto puede tener sentido la búsqueda de métodos didácticos que aspiren a ser eficaces.⁽³⁾

2. DEFINICIÓN E IMAGEN DEL CONCEPTO

Lo que nos interesa subrayar es que, siguiendo tal metodología, el niño llega por su solo esfuerzo a la definición, sin que ningún concepto le sea impuesto. E. Castelnuovo

[...] comenzar con varios ejemplos y contraejemplos por medio de los cuales los estudiantes se formen la imagen del concepto; si el concepto no es demasiado complicado, el profesor puede incluso pedirles que sugieran su definición del concepto. S. Vinner

(2) Recomiendo la lectura del libro de Bruno D' Amore (2005), que, desde una profunda visión teórica, brinda las bases pedagógicas, filosóficas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática.

(3) Matemáticos interesados en la educación tales como Lebesque, Poincaré, Hadamard, Halmos, Milton y Thom, todos ellos de primera clase, reflexionaron sobre la enseñanza de las Matemáticas rigurosamente. Sin embargo, cometieron el error de tomar como base únicamente los contenidos matemáticos y su estructura, obviando el proceso de pensamiento del estudiante. En cuanto al psicólogo Piaget, las críticas a su trabajo se centran en lo que se refiere al pensamiento espacial, en tres puntos: la distinción entre percepción y representación, la metodología y la utilización lógica de las propias matemáticas. Utiliza, a veces propiedades de las definiciones que no son matemáticamente aceptables. Su investigación sobre la medida es de limitada utilidad para proporcionar un modelo de desarrollo conceptual generalizable a todos los sistemas de medida. Su falta de atención a los procesos de aprendizaje fue denunciada por Vygotsky. Los pedagogos Pestalozzi, Montessori, Dacroly y Freinet jalonaron un itinerario del pensamiento educativo que parte de la concepción sensualista-empirista para llegar a la escuela activa (Castelnuovo, Aebli, etc.), según la cual, las verdades fundamentales reposan sobre el testimonio de los sentidos: la pedagogía consiste en "hacer", "ver" y "tocar". Un mal entendimiento hace pensar que el tener al estudiante activo con un material cualquiera es suficiente. Sin embargo, si esta actividad física no se proyecta hacia el plano de la actividad mental no hay verdadera actividad matemática; hay, simplemente, empirismo.

Se puede hacer referencia a muchas otras investigaciones, pero razones de espacio me lo impiden. Una visión completa de la historia de la Didáctica de la Matemática queda recogida en el capítulo 1 del tomo 3, 7-77, del Proyecto Docente presentado para el acceso al cuerpo de Profesores Titulares de Escuela Universitaria.

Hasta no hace mucho tiempo, una incursión en los libros de texto o las charlas con algunos profesores, nos mostraba que las definiciones tenían un papel fundamental en la presentación de la materia al estudiante. Vinner⁽⁴⁾ ha puesto en evidencia los problemas y dificultades que resultan de este estado de cosas.

Hoy en día ya existe un creciente cuerpo de investigación que ha “ligado” la mente de los estudiantes con las matemáticas a través del término *concept-image*,⁽⁵⁾ acuñado por Tall y Vinner (1981), estableciendo así una diferencia entre lo que este término significa y la definición del concepto. Ambos términos tienen esta característica: todos los conceptos matemáticos, excepto los primitivos, tienen definiciones formales. Muchas de estas definiciones se presentan a los estudiantes más tarde o más temprano. Pero el estudiante no necesariamente utiliza la definición cuando decide si un objeto matemático es un ejemplo o un contraejemplo del concepto, sino que, en la mayoría de los casos, toma una decisión basándose en la **imagen del concepto**, que es el conjunto de todas las imágenes mentales asociadas en la mente del estudiante con el nombre del concepto, pudiendo tratarse de una representación visual o bien de una serie de impresiones o experiencias. Es, por tanto, algo no verbal, que se ha ido formando a lo largo de los años por medio de experiencias de todo tipo y que puede que contenga partes que no estén de acuerdo con la definición formal o con otras de la propia imagen. En estos casos, el comportamiento del estudiante puede diferir de lo que espera de él el profesor. El hecho de que un mismo estudiante puede reaccionar de manera diferente ante un mismo concepto en situaciones distintas es lo que hizo a los citados autores introducir el término *evoked concept-image*, para describir la parte de la memoria evocada en un concepto dado.

Deducimos que, en la teoría de Vinner, adquirir un concepto significa, entre otras cosas, adquirir un mecanismo de construcción e identificación mediante el cual será posible identificar o construir todos los ejemplos del concepto tal y como éste está concebido por la comunidad matemática. En todo ejemplo de concepto podemos encontrar **atributos relevantes**, que son las propiedades que lo definen como tal concepto, y **atributos irrelevantes**, que son propiedades no necesarias a ese con-

(4) Para Vinner, las definiciones crean un serio problema en el aprendizaje de las matemáticas. Representan, quizá, más que otra cosa, el conflicto entre la estructura de las matemáticas según las conciben los matemáticos profesionales y los procesos cognitivos de la adquisición de conceptos. El profesor y el autor del libro de texto pueden pensar que su tarea ha terminado con la introducción de la definición formal. Pero no deben hacerse ilusiones sobre el poder que tenga esta definición en el pensamiento matemático del estudiante. (Vinner, 1991)

(5) Término que ha sido traducido al castellano con diversas expresiones. Yo he adoptado la de “imagen del concepto”.

cepto y que permiten diferenciar unos ejemplos de otros. Las primeras son útiles para dar la definición del concepto; las segundas las utilizamos, generalmente, para realizar clasificaciones.

La relación entre los elementos que permiten al estudiante construir conceptos básicos geométricos basada en los planteamientos de Hershkowitz (1990) queda recogida en la figura 1.

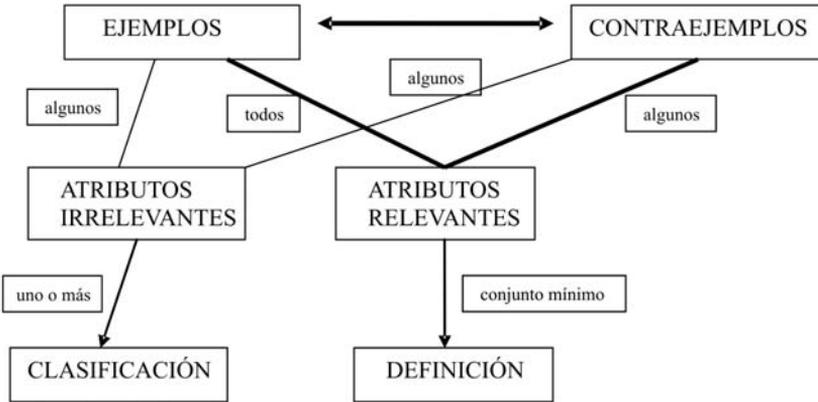


Figura 1

Desde esta perspectiva, se debe comenzar presentando varios ejemplos y contraejemplos mediante los cuales los estudiantes se formen una imagen del concepto; si el concepto no es muy complicado, el profesor puede pedirles, incluso, que sugieran su propia definición. La clave está, en mi opinión, en la adecuada selección de los ejemplos y contraejemplos.

Para seleccionar ejemplos y contraejemplos, Charles (1980) recomienda seguir las directrices recogidas en la figura 2, que constituyen un resumen de todo el proceso elaborado por la autora.

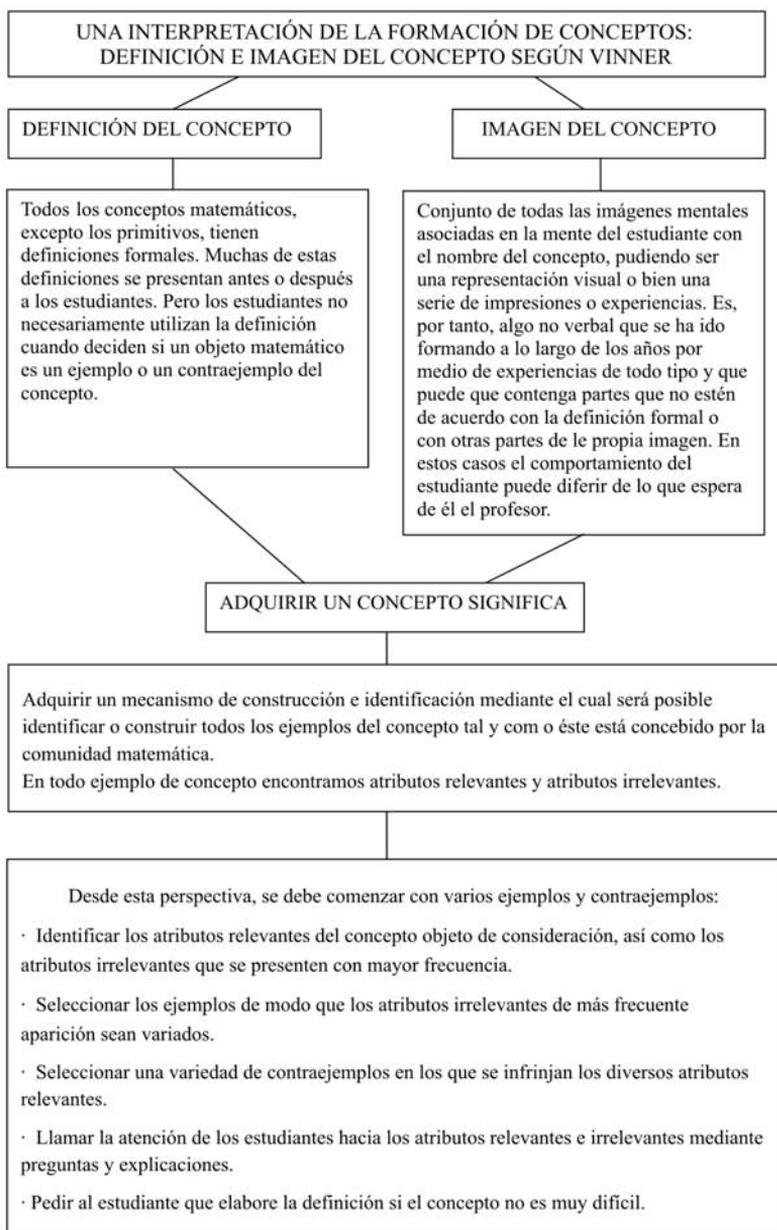


Figura 2

3. MODELOS DE ACTIVIDAD MENTAL

Las palabras y el lenguaje, escrito u oral, parece que no juegan ningún papel en mi mente. Los constructores psicológicos que son los elementos del pensamiento son ciertos signos o dibujos, más o menos claros que pueden reproducirse y combinarse a voluntad.

H. Hadamard

La mayoría de los profesores, según afirma Vinner, tienen la creencia (casi siempre errónea) de que los estudiantes, ante una determinada tarea, basan sus razonamientos en las definiciones formales de los conceptos que han recibido de forma verbal y que sus imágenes tienen un papel secundario. Pero las cosas, como nos muestra el propio Vinner,⁽⁶⁾ no ocurren así.

Supongamos la existencia de dos “células” diferentes en nuestra estructura cognitiva; en una se almacena(n) la(s) definición(es) del concepto y en otra las imágenes del concepto. Una de ellas, o incluso ambas, podrían estar vacías. Puede haber interacción entre las dos, o se pueden formar independientemente. Muchos profesores esperan que, tanto en el proceso de formación de conceptos como en los procesos de resolución de problemas o en la realización de tareas, se activen las dos células e interactúen entre ellas. Estas creencias darían lugar a los tres modelos siguientes (Figs. 3, 4 y 5) de actividad mental:⁽⁷⁾

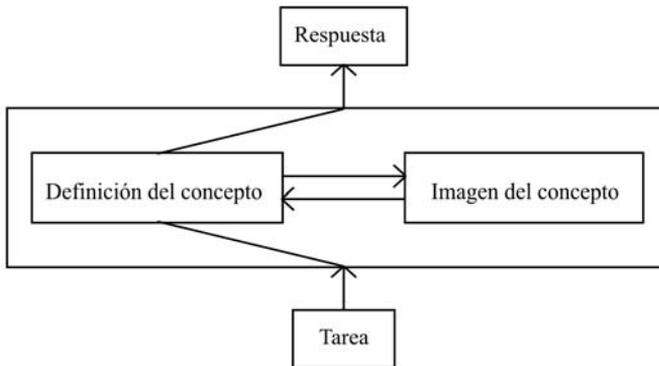


Fig. 3. Interacción entre la definición y la imagen.

(6) Vinner (1991, 65-81).

Hershkowitz (1990) describe tres tipos de comportamiento de los estudiantes identificados por el modelo de Vinner, dependiendo de la calidad de las imágenes conceptuales de un estudiante relacionadas con los ejemplos prototípicos que posee el estudiante.

(7) Tomados de Vinner (1991, 71-73).

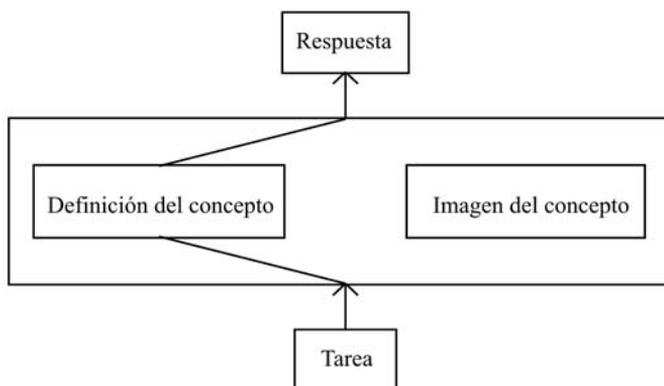


Fig. 4. Deducción puramente formal

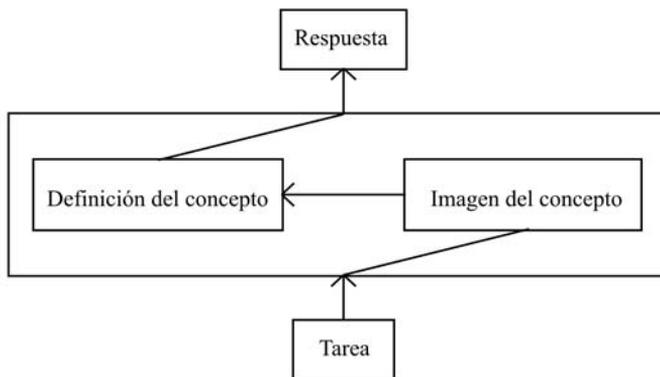


Fig. 5. Deducción según pensamiento intuitivo.

La característica común a todos estos procesos ilustrados es que, reaccione como reaccione nuestro sistema de asociación cuando se nos plantea un problema en un contexto técnico⁽⁸⁾, se supone que no debemos formular nuestra solución antes de consultar la definición del concepto. Este es, por supuesto, el proceso deseable. Desafortunadamente, la práctica es diferente, ya que lo que realmente ocurre nos lo muestra la figura 6.

(8) Todo estudiante se mueve en dos tipos de contextos: los contextos de la vida corriente y, en oposición a ellos, los "contextos técnicos". En estos últimos, es necesario asignar un significado a cada término, y, por consiguiente, cuando se trabaja en estos contextos se deben consultar las definiciones, ya que, en caso contrario, podría haber equivocaciones.

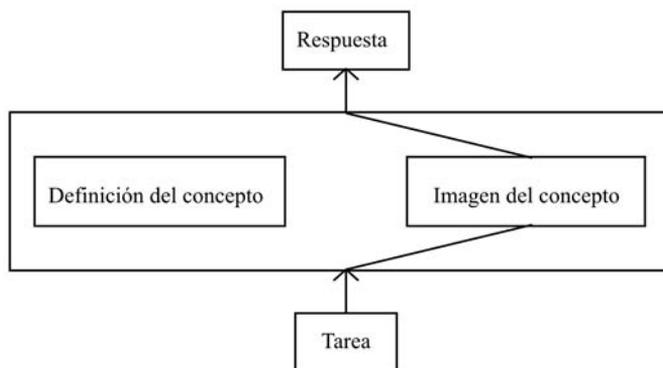


Fig. 6. Respuesta intuitiva.

Aquí, lo que ocurre es que la célula de la definición del concepto no está vacía, pero no es consultada durante el proceso de resolución del problema. Prevalecen los hábitos del pensamiento de la vida corriente, y el estudiante no es consciente de la necesidad de consultar la definición formal.

Vistas así las cosas, parece que lo adecuado es actuar sobre la imagen del concepto para transformarla y mejorarla mediante la ayuda de lo que Tall (1985) llama **organizadores genéricos**, que son micro-mundos dentro de los cuales el estudiante puede manipular un concepto u objetos relacionados con él. Unas veces serán programas de ordenador; otras, material curricular, etc.

4. PARALELISMO ENTRE UN MARCO PSICOLÓGICO Y UN MARCO EPISTEMOLÓGICO

Un conocimiento profundo de las cosas no lo obtendremos ni ahora ni nunca en tanto que no las contemplemos en su crecer desde el principio. Aristóteles

Este análisis que hace Vinner (1991) acerca de cómo se crean y evolucionan las imágenes del concepto en la mente de los estudiantes tiene, desde mi punto de vista, un paralelismo con la forma en que Lakatos⁽⁹⁾, en 1976, reconstruye la evolución histórica del conocien-

(9) Lakatos (1976) ofrece una alternativa totalmente diferente del fundacionismo, que ha dominado la filosofía de la matemática a lo largo del siglo XX. Se puede decir que Poppes y Polya son padrinos de su obra.

to matemático. Por lo tanto, el conocer el desarrollo histórico de un concepto nos puede ayudar a comprender cómo se produce el proceso de aprendizaje de ese concepto –por qué aparecen determinadas dificultades o errores– o a organizar su enseñanza.

Esta metodología se basa en una hipótesis según la cual los problemas que ha tenido que resolver la humanidad para llegar al conocimiento que tenemos hoy de un concepto determinado son paralelos a los problemas que tiene que superar un estudiante actual para comprender correctamente ese concepto. Se trata, por tanto, de emparejar el proceso de aprendizaje con ese desarrollo histórico, evitando el error de creer que los estudiantes recorren los mismos caminos por los que se ha desarrollado la historia o que hay que conducirlos paso a paso, pues las condiciones actuales son muy diferentes a las de tiempos pasados.

Aunque hay claras diferencias, como afirma Dreyfus (1991), entre el proceso de aprendizaje y el de investigación (creación), lo que nos interesa es realzar las similitudes, y es que, en ambos casos, el individuo, mentalmente, tiene que manipular, investigar y hallar algo sobre unos objetos de los que posee unos conocimientos muy parciales y fragmentados. Por esto defiende que el profesor que ha hecho investigación en Didáctica de la Matemática entiende mejor los procesos de aprendizaje de los estudiantes de Matemáticas.

El paralelismo del que he hablado anteriormente lo establezco en los términos siguientes: la familiaridad con el concepto de la que habla Lakatos se puede identificar con la imagen del concepto de Vinner. Los monstruos pueden verse como los atributos, propiedades, etc., que no están incluidos en la imagen del concepto. El largo proceso de pruebas y refutaciones lo asociamos con el estudio de ejemplos, contraejemplos y análisis de propiedades. La exclusión de monstruos supondría una expansión de la imagen del concepto. Por último, cuando Lakatos habla del concepto generado por la prueba, podría tratarse de la imagen del concepto generado por la experiencia del estudiante.

Se debe tener en cuenta el papel que juegan en la formación de la imagen del concepto: los procesos de resolución de problemas y realización de tareas, los errores, los procesos visuales, la utilización del ordenador y las distintas secuenciaciones del currículo.⁽¹⁰⁾

(10) Ejemplos desarrollados de aplicación de la teoría en el aula pueden verse en Turégano (2006). La aplicación en investigación queda recogida en Turégano (1994) y, de forma esquemática, en Turégano (1998), donde el marco epistemológico de Lakatos y el psicológico de Vinner se unen de forma coherente para estudiar las imágenes del concepto de integral definida a lo largo de la historia y en la mente de los estudiantes.

5. APLICACIÓN EN EL AULA. EL CONCEPTO DE POLÍGONO

En la vida intelectual, a diferencia de lo que sucede en la vida civil, es el hijo quien reconoce al padre. Julián Marías

Desde el año 1992, en el inicio de cada curso académico, trato de determinar en los estudiantes, mediante sencillos cuestionarios, las imágenes de los conceptos geométricos que fundamentan la geometría de la educación primaria. La finalidad de esta pequeña investigación es tomar decisiones acerca de cómo actuar para poder mejorar, completar o crear dichas imágenes.

Voy a presentar a continuación, de forma esquemática, parte de un material curricular diseñado por la autora para introducir el concepto de polígono y, a partir de ahí, poder hacer clasificaciones.

Año tras año, los estudiantes presentan los mismos resultados:

- Sus imágenes son incompletas: no están incluidas todos los atributos relevantes.
- No reconocen ni distinguen los atributos irrelevantes.
- No son capaces de dar una definición, que es precisamente lo que se les ha enseñado a lo largo de su escolaridad.

Esto implica que el estudiante de Magisterio, al inicio del curso, no es capaz de reconocer y reproducir nada más que los ejemplos prototípicos: cuadrilátero, pentágono, hexágono, etc., convexos, presentados, por supuesto en la forma estándar. Incluso tienen dudas de que el triángulo sea o no un polígono.

A continuación, se muestran las 4 primeras láminas que el estudiante realiza para conseguir dar una definición de lo que entiende por polígono y distinguir, sin ningún género de duda, los polígonos de las demás figuras geométricas.

Lámina 1. Ejemplo y contraejemplo de polígono. Finalidad: determinación de los atributos relevantes.

| Poligonos | No poligonos | Diferencia(s) |
|---|---|---------------|
|  |  | |
|  |  | |
|  |  | |
|  |  | |

Lámina 2. Múltiples ejemplos de polígonos en los que intervienen el máximo de atributos irrelevantes. Finalidad: permitir al alumno reafirmar los atributos relevantes (todas los tienen) y determinar los irrelevantes (unas las tienen y otras no).

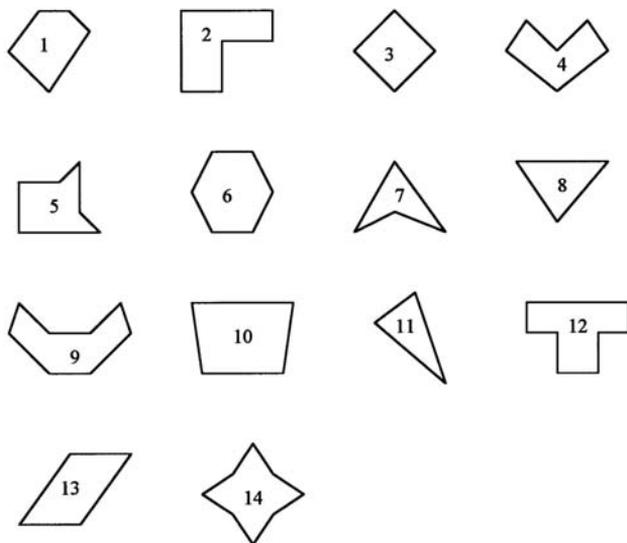


Lámina 3: Múltiples contraejemplos de polígonos. Finalidad: justificar que no es un polígono negando alguno(s) de los atributos relevantes.

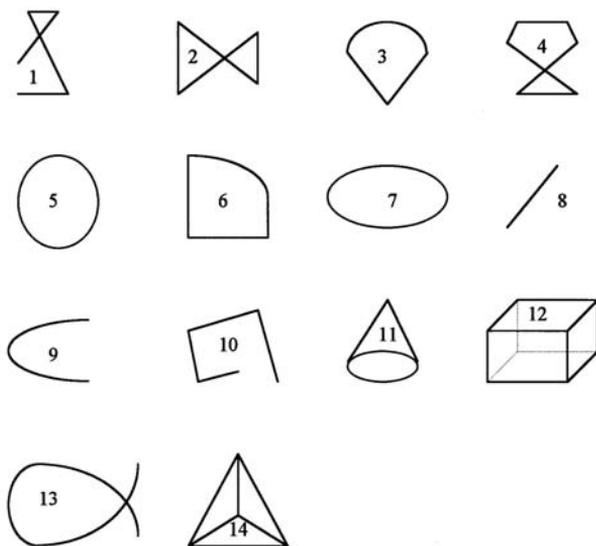
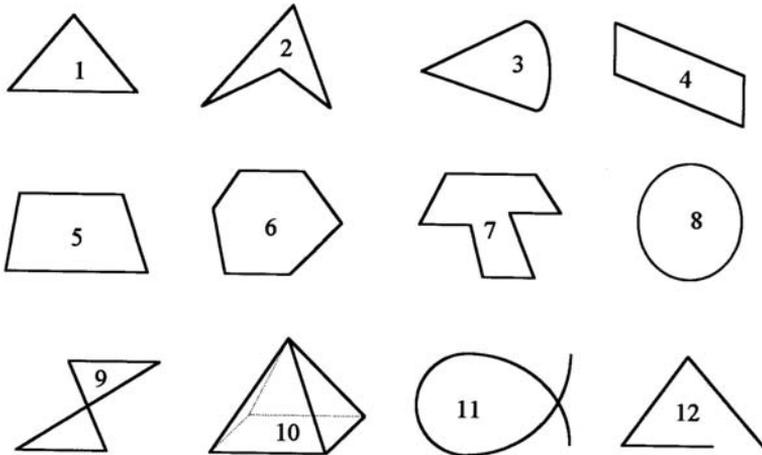


Lámina 4. Múltiples ejemplos y contraejemplos de polígonos. Finalidad: Justificar (señalando los atributos relevantes) que una figura es un polígono. Justificar (negando uno o varios atributos relevantes) que una figura no es un polígono.



Una vez realizadas estas cuatro láminas, ya se puede pedir al estudiante que dé una definición de polígono. Es un proceso opuesto al del enfoque tradicional, en el que el profesor impone una definición sin un análisis previo. El resultado obtenido ya ha sido comentado al inicio del epígrafe 5.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Castelnuovo, E. (1970). *Didáctica de la matemática moderna*. México: Trillas.
- Charles, R. I. (1980). Some Guidelines for Teaching Geometry Concepts. *Arithmetic Teacher*, 27 (8) 18-20.
- D'Amore, B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática*. Barcelona: Reverté.
- Dreyfus, T. (1991). Advanced Mathematical Thinking Processes. En Tall (Ed.): *Advanced Mathematical Thinking*, 25-41. London: Kluwer Academic Publishers.
- Glaeser, G. (1981). Epistémologie des nombres relatifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 2 (3) 303-346.
- Hershkowitz, R. (1990). Psychological Aspects of Learning Geometry. En Nesher & Kilpatrick (Eds.): *Mathematics and Cognition*, 70-95. Cambridge: Cambridge University Press.
- Lakatos, I. (1976). *Proofs and Refutations. The Logic of Mathematical Discovery*. Cambridge. Cambridge University Press.
- MEC (1989). *Diseño Curricular Base. Educación Primaria*, 377-407. Madrid.

- NCTM (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Traducido por la Sociedad Andaluza de Educación Matemática *Thales*. Granada: Proyecto Sur Industrias Gráficas, S.L.
- Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.
- Turégano, P. (1994). *Los conceptos en torno a la medida y el aprendizaje del cálculo infinitesimal*. Tesis doctoral en microfichas. Universidad de Valencia.
- Turégano, P. (1998). Del área a la integral. Un estudio en el contexto educativo. *Enseñanza de las Ciencias*, 16 (2) 233-249.
- Turégano, P. (2006). *Didáctica de la Geometría*. Albacete: Reproducciones Gráficas (2ª edición).
- Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. En D. Tall (Ed.): *Advanced Mathematical Thinking*, 65-81. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.