

EL ANÁLISIS DE MANUALES EN LA ENSEÑANZA DE LA INTEGRAL DEFINIDA

LOURDES ORDÓÑEZ CAÑADA
ÁNGEL CONTRERAS DE LA FUENTE

RESUMEN

Este trabajo realiza, en primer lugar, un estudio de manuales de primero y segundo de Bachillerato-LOGSE, respecto al concepto de integral definida, exponiendo las cuatro dimensiones que se han considerado y un ejemplo de aplicación a un manual de 2.º de Bachillerato. En la segunda parte, se hace un estudio comparativo entre los nueve manuales analizados, más representativos de Jaén y provincia, centrándonos en los significados institucionales históricos y en los conflictos semióticos.

1. INTRODUCCIÓN

En determinados ambientes educativos es fácil encontrar artículos, conferencias, comunicados y, en general, comentarios que aluden al bajo rendimiento de los alumnos que ingresan en la Universidad, en particular en las carreras científico-tecnológicas y, específicamente, en aquellas materias en las que es básica la comprensión de conceptos fundamentales del Análisis Matemático (límite, continuidad, derivada e integral).

Con la implantación del Bachillerato-Logse, ese bajo rendimiento académico puede ser inferior, ya que a los estudiantes se les dota de un conocimiento intuitivo sobre los conceptos del Cálculo que no les permite alcanzar el mínimo grado de abstracción que se requiere para el estudio de esas nociones en el primer curso universitario. Los diversos conflictos semióticos (Godino, 2001; Contreras, 2002) que surgen en el aprendizaje de las nociones indicadas, nos llevan a inferir que una enseñanza que no tenga en cuenta la superación de dichos conflictos, por parte de los alumnos, influirá negativamente en su rendimiento.

2. MARCO TEÓRICO

Esta comunicación se enmarca en la teoría de las funciones semióticas (TFS); Godino y Batanero (1998); Godino (2001); Font (1999); Contreras y Font (2002); Contreras (2002), la cual es conocida, por lo que únicamente se dará una breve descripción de este enfoque teórico centrado en los constructos significado institucional y conflicto semiótico, que son los más relevantes para este trabajo.

Significado institucional

Los objetos matemáticos se pueden considerar como entes abstractos que emergen progresivamente de sistemas de prácticas socialmente compartidas en una institución, ligadas a la resolución de cierto campo de problemas matemáticos. Se recurre a la máxima pragmática para definir el significado de un objeto institucional: Sistema de prácticas institucionales asociadas al campo de problemas de las que emerge el objeto en un momento dado.

Conflicto semiótico

En Godino (2001), se da la siguiente definición de conflicto semiótico: «disparidad o desajuste entre los significados atribuidos a una misma expresión por dos sujetos (personas o instituciones) en interacción comunicativa». Clarificando este constructo, denominaremos conflicto semiótico a toda expresión matemática en la que alguno o algunos de los elementos semióticos (entidad primaria o faceta) del significado, correspondiente a dicha expresión, entre en contradicción o esté ausente con respecto al significado institucional de referencia.

Obviamente, lo que interesa al profesor es identificar (en la historia, en los manuales, en la clase...) posibles conflictos semióticos, es decir, conflictos semióticos potenciales. En este trabajo se exponen los conflictos semióticos sobre la integral definida que se han detectado y que pueden ejemplificar este constructo.

3. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Uno de los fenómenos didácticos que consideramos fundamental dentro de la enseñanza del Análisis Matemático es el de la algebrización del cálculo integral escolar, ya señalado por Artigue (1998), el cual se manifiesta en enfoques instruccionales excesivamente algebraicos y, por tanto, reduccionistas, al basarse en operaciones de tipo algebraico, tratando de una forma simplista, e incluso eludiendo, el estudio de los resultados de las razones de cambio.

De este fenómeno didáctico, emerge un problema didáctico-matemático, cuyo estudio supone todo un complejo entramado de otros fenómenos derivados, que conducen a un verdadero programa de investigación. La cuestión básica puede

formularse mediante las preguntas: ¿Por qué se enfoca la enseñanza elemental del Cálculo Integral bajo una perspectiva algebraica y no como el estudio de los procesos de cambio característicos del Cálculo?, ¿qué tipo de enseñanza ofrecen los manuales, respecto a este objeto matemático?, ¿cuáles son los significados institucionales y conflictos semióticos tratados en los libros de texto?

4. HIPÓTESIS

La búsqueda de respuestas a esta pregunta nos conduce a formular:

Hipótesis 1. Con referencia a las situaciones de enseñanza donde aparece el objeto de integral, los libros de texto muestran unos significados que pueden identificarse dentro de los que el estudio histórico determina.

Hipótesis 2. En general, en los textos dirigidos al Bachillerato, no se abordan algunos de los significados institucionales de la integral definida, cuyo estudio podría facilitar la emergencia de este objeto. Además, se observa la presencia de determinados conflictos semióticos que pueden originar dificultades de comprensión.

5. OBJETIVOS

Esta investigación persigue un objetivo general: Identificar los factores y fenómenos didácticos que pueden influir en una adecuada comprensión, en los estudiantes de Bachillerato, respecto a la integral definida.

Para alcanzar este objetivo general se requieren diversos objetivos específicos. Sin embargo, dadas las lógicas limitaciones de este trabajo, en él se tratarán únicamente:

- Analizar los significados institucionales históricos y conflictos semióticos asociados que pueden detectarse en el desarrollo epistemológico del objeto integral definida.
- Analizar los significados institucionales y los conflictos semióticos correspondientes a libros de texto de Bachillerato actuales, correspondientes a la muestra elegida, respecto al objeto integral, comparándolos con los significados institucionales históricos.

6. DISEÑO Y METODOLOGÍA

Población, muestra y procedimiento de muestreo

El universo para realizar la investigación lo constituyen los manuales de Matemáticas de 1.º y 2.º de Bachillerato utilizados por los Institutos de Educación

Secundaria de Jaén y provincia durante el curso 2000-2001. La muestra está constituida por 9 libros de texto, para cuya selección se ha atendido a que fueran los más recomendados y/o utilizados por los profesores y estudiantes.

Metodología empleada

Esta es una investigación que analiza principalmente variables cualitativas, como los elementos de significado institucional del objeto integral definida en 1.º y 2.º de Bachillerato. Se siguió la metodología propuesta en Contreras y cols. (2003), que exponemos en epígrafe aparte.

7. ANÁLISIS DE MANUALES

El análisis de libros de texto constituye un instrumento muy útil para estudiar los significados institucionales y los conflictos semióticos inherentes a este momento de la transposición didáctica o, como denomina Schubring (1987), de los procesos de elementarización. A este respecto, destacan las aportaciones de: Schubring (1985, 87, 97), Kang y Kilpatrick (1992), Morgan (1996), Love y Pimm (1996).

En relación con el análisis de manuales respecto a las nociones del Análisis Matemático, también han sido numerosos los estudios desarrollados. Nuestro grupo de investigación, se viene trabajando desde 1995 en este campo. Así en Sánchez y Contreras, 1995 se analizaron textos matemáticos de 2.º de Bachillerato, de COU y de primer año de carreras técnicas, en cuanto a la noción de límite, según las diversas variable. Posteriores trabajos han desarrollado las ideas anteriores (Sánchez, 1997, Sánchez y Contreras, 1998 y Contreras y cols., 2000...).

En Sierra; González y López (1999), se analizaron manuales según diversas categorías de análisis: conceptual, didáctico-cognitivo y fenomenológico, en torno a los conceptos de límite y continuidad. Posteriormente, en González (2002) se amplió el análisis de manuales.

En Contreras y cols. (2003), se analizaron los 10 manuales de Matemáticas de 1.º y 2.º de Bachillerato más utilizados en los centros de Educación Secundaria de Jaén y provincia, en torno a los conceptos de derivada e integral. Nuestra propuesta se diferencia de las anteriores al incorporar los significados institucionales y los conflictos semióticos a la dimensión epistemológica. Además, se amplía y profundiza en las otras dimensiones.

7.1. Dimensiones del análisis de manuales

Teniendo en cuenta el estudio epistemológico, que aparece posteriormente, el cual nos informa de los significados institucionales y de los conflictos semióti-

cos de las nociones tratadas, y las aportaciones comentadas, se describen las diversas dimensiones consideradas en este estudio, de una forma resumida por razones de extensión (para una información más detallada, ver Contreras y cols., 2003).

0) Introducción

Título del capítulo y posición del mismo con relación al conjunto de la obra.

1) Análisis didáctico-cognitivo: ANDCG

ANDCG₁: Objetivos Si aparecen, de modo explícito.

ANDCG₂: Teorías de la enseñanza-aprendizaje subyacentes.

ANDCG₃: Capacidades que se desarrollan en el lector: recepción del conocimiento de modo pasivo, descubrimiento del conocimiento, construcción del conocimiento.

ANDCG₄: Conexión con las ideas previas: si el autor busca enlazar el concepto que se está trabajando con otros conceptos estudiados.

2) Análisis fenomenológico didáctico: ANFD

ANFD₁: Uso de una situación de la propia matemática.

ANFD₂: Una situación de otras ciencias.

ANFD₃: Una situación de la realidad.

3) Análisis sustantivo: ANS

ANS₁: Definición. (Intuitiva o formal).

ANS₂: Estatus. (Herramienta u objeto de conocimiento).

ANS₃: Ejemplos.

Lugar donde se incluyen, contexto utilizado (numérico, gráfico...), tipo de función utilizada (continua, creciente, lineal...), resolución (hecha o no, completa, intuitiva...) y procedimiento de resolución (numérico, gráfico...).

ANS₄: Ejercicios.

En primer lugar, se explicitará si está resuelto. Se clasificaran en: conocimientos previos, cálculo algorítmico, búsqueda, aplicación de propiedades o de la definición, demostración, vida real.

ANS₅: Registros semióticos (lenguajes).

Distinguiremos: registro semiótico vernáculo, algebraico, gráfico, numérico, métrico.

ANS₆: Nociones asociadas. Si el autor hace referencia dentro del tema estudiado.

4) Análisis epistemológico: ANEP

Estudia la evolución del conocimiento de que se trate. Corresponde al estudio de los significados institucionales y los conflictos semióticos.

ANEP_I: Conflictos semióticos presentes no tratados en el manual.

ANEP_{II}: Conflictos semióticos no presentes en el manual.

ANEP_{III}: Significados institucionales históricos.

ANEP_{IV}: Referencias históricas.

8. SIGNIFICADOS INSTITUCIONALES HISTÓRICOS DE LA INTEGRAL DEFINIDA

En este apartado, son de interés numerosas aportaciones, de las que destacamos: Wenzelburger (1993); Turégano (1993, 98); Azcárate y cols. (1996); Cantoral (2000); Labraña (2001); Ordóñez y Contreras (2001). En cuanto a libros de texto e históricos sobre la integral definida, las principales referencias bibliográficas originales de autores como: Lacroix, Cauchy, Baire, Lagrange, Moigno, García de Galdeano, Rouché y Lévy. Además, de otras referencias más generales.

Por razones de espacio, únicamente se enumeran y describen de modo muy conciso los significados históricos de la integral definida (para mayor detalle ver Contreras y cols., 2003):

- Integral de Newton (SIH₁), tiene mucho que ver con la integral indefinida al utilizar la inversión de la diferenciación para el cálculo de las áreas.
- Integral de Leibniz (SIH₂), está relacionado con el proceso que hacen los manuales con los rectángulos superiores e inferiores, puesto que interpreta el área curvilínea como suma de rectángulos.
- Integral de Cauchy (SIH₃), como límite de una suma para funciones continuas y para funciones con discontinuidades de salto e infinitas.
- Integral de Riemann (SIH₄), como límite de una suma para funciones con discontinuidades aisladas y también aquellas que tienen un conjunto denso de puntos de discontinuidad. Posteriormente, prescindió de la continuidad y de la continuidad a trozos en la definición de integral.
- Integral de Darboux (SIH₅), para funciones acotadas, por tanto integrables, y con discontinuidades de medida cero. Define las sumas inferiores y superiores y demuestra el Teorema Fundamental del Cálculo para funciones integrables en sentido amplio.
- Integral de Lebesgue (SIH₆), define función acotada y medible en un conjunto, aunque se puede extender a cierta clase de funciones medibles no acotadas. Es el conjunto de valores de la imagen (la ordenada) lo que se divide en partes.

Conflictos semióticos asociados a los significados institucionales

- CSVAA del valor aproximado del área. Consiste en considerar que el área sólo puede tomar un valor aproximado y no fijo. Se asocia a la fuerte dependencia del infinito potencial frente al actual.
- CSGL de la consideración geométrica del límite. Se efectúa el paso al límite en el nivel de la imaginación visual de las magnitudes, donde los rectángulos se estrecharan hasta llegar a ser efectivamente segmentos.
- CSDD de la discordancia dimensional. Una cierta percepción de las magnitudes se inmiscuye en los cálculos de las áreas y de los volúmenes de manera que magnitudes de dimensiones distintas se entremezclan, lo que puede conducir al error.
- CSMU del movimiento uniforme. Puede aparecer cuando se introduce la integral definida con situaciones que tienen que ver con el espacio recorrido por un móvil y su velocidad.

9. EJEMPLOS DE APLICACIÓN

Este apartado se exponen dos ejemplos. En el primero se estudia un manual, uno de los más representativos (tabla1), en cuanto a las diversas dimensiones desarrolladas en el apartado 7, a fin de poder mostrar la potencia de las diversas dimensiones en el análisis de la actividad matemática de un texto.

En el segundo, se estudian todos los manuales, aunque respecto a la dimensión epistemológica (ANEP), puesto que se trata de la más relevante de nuestro marco teórico, permitiéndonos comparar todos los manuales desde una misma dimensión.

Discusión

No aparecen objetivos en el manual, abordándose directamente los contenidos. El esquema corresponde con una introducción de tipo trasmisivo, en consecuencia, el desarrollo de contenidos no favorece el trabajo de investigación. Por ello, aunque se desarrolla la integral definida como objeto de conocimiento en sí misma, utiliza sólo una definición formal y los ejemplos, generalmente resueltos, aparecen siempre después de ésta.

El tema comienza haciendo referencia al curso anterior, en el que se introdujo la noción de área bajo una curva mediante el cálculo del espacio en un movimiento. En este sentido, ANDF, nos informa de que no se contemplan otro tipo de situaciones provenientes de otras ciencias ni de la vida real. Además de los ejercicios, sólo el 89% se dedica, o bien a cálculos algorítmicos, o bien a aplicaciones de propiedades, quedando un pequeño porcentaje para problemas de búsqueda. Únicamente un ejercicio es de aplicación a la vida real, lo que abunda en la escasa contextualización del concepto.

La dimensión ANEP se comentará globalmente con los demás manuales.

Tabla 1. *Manual 8. (2.º de Bachillerato)*

<i>VARIABLES O DIMENSIONES</i>	<i>SUBVARIABLES</i>	
ANDCG	ANDCG ₁	Trasmisiva. Papel pasivo, receptor de conocimientos. El tema comienza haciendo referencia al curso anterior, en el que se introdujo la noción de área bajo una curva mediante el cálculo del espacio en un movimiento.
	ANDCG ₂	
	ANDCG ₃	
	ANDCG ₄	
ANDF	ANDF ₁	Se aborda el área de una región del plano.
	ANDF ₂	
	ANDF ₃	
ANSC	ANS ₁	Formal.
	ANS ₂	Objeto de conocimiento.
	ANS ₃	Inmediatamente después de considerar la definición. Funciones polinómicas. Resueltos completamente.
	ANS ₄	13 de cálculo algorítmico, 40 de aplicación directa de una propiedad, 6 búsqueda, 1 aplicación de la definición, 1 vida real.
	ANS ₅	Vernáculo, algebraico, numérico y gráfico.
	ANS ₆	
ANEP	ANEP _I	SVAA; CSGL; CSDD SIH1; SIH2; SIH3 En cuanto a la notación y biografías. Hace referencia a los sólidos de Cavalieri.
	ANEP _{II}	
	ANEP _{III}	
	ANEP _{IV}	

Discusión

Se constata que el concepto de integral definida viene asociado, casi exclusivamente, a la idea de área encerrada bajo la curva. En algunos manuales de 2.º de Bachillerato aparece también el significado institucional de Cauchy como una formalización, difícil para este nivel. En general, no viene acompañada de ejercicios que lo clarifiquen, dejando en manos del lector su comprensión.

Hay algunos significados institucionales históricos que no aparecen en ningún manual como es el caso del de Darboux, lo que es lógico debido a la herramienta matemática necesaria no oportuna en esta etapa.

Nos parece negativo que apenas se trabaje la integral definida como resultado de los procesos de cambio. Prácticamente el único intento podría provenir de los ejemplos y ejercicios extraídos de la Física. Sin embargo, éstos quedan aislados y como simples casos de aplicación de la función velocidad-tiempo, lo que puede conducir a los alumnos al conflicto semiótico CSMU.

Tabla 2. Dimensión ANEP (todos los manuales)

Manuales	ANEPI	ANEPII	ANEPIII	ANEPIV
1 - 1.º Bac		CDVAA, CSGL, CSDD.	SIH ₁ , SIH ₂	Al principio del bloque breve recorrido histórico.
3 - 1.º Bac		CSVAA, CSGL	SIH ₂ , SIH ₃	Breve recorrido histórico del desarrollo del cálculo infinitesimal al principio del bloque «funciones».
7 - 1.º Bac	CSMU	CSGL CSDD	SIH ₁ , SIH ₂	
2 - 2.º Bac	CSVAA	CSDD.	SIH ₁ , SIH ₂ , SIH ₃	
4 - 2.º Bac		CSVAA, CSGL	SIH ₂ , SIH ₃	
5 - 2.º Bac			SIH ₂ , SIH ₃	
6 - 2.º Bac	CSVAA		SIH ₂ , SIH ₃	
8 - 2.º Bac	CSVAA, CSIGL, CSDD.		SIH ₁ , SIH ₂ , SIH ₃	En cuanto a la notación y biografías. Hace referencia a los sólidos de Cavalieri.
10 - 2.º Bac		CSVAA, CSGL, CSDD, CSMU	SIH ₂ , SIH ₃	

Con respecto a las dificultades, se ha detectado una fuerte presencia del conflicto semiótico del valor aproximado del área CSVAA, como consecuencia del paso al límite. Además, al hacer que la amplitud de los intervalos tienda a cero, se puede considerar que el área se completaría como infinitos segmentos o que se podría obtener el volumen como una infinidad de superficies, lo que nos llevaría a CSDD. Este conflicto semiótico de discordancia dimensional, está próximo a lo que Schneider (1988), en determinados contextos designa obstáculo de heterogeneidad de las dimensiones. Un manual de 2.º curso lo potencia.

10. CONCLUSIONES

En las discusiones anteriores hemos podido ver cómo el tratamiento de la integral definida está muy sesgado hacia los significados institucionales SIH₂ y SIH₃, lo cual conduce a una interpretación como área geométrica muy descontextualizada.

Nos parece importante introducir la integral definida como el resultado de los procesos de cambio de distintos fenómenos. Esto permitirá asociar de forma natural la integral definida con la derivada, que estudia el cambio instantáneo.

Así se abriría un gran campo de problemas que no sólo provendría de la Física. Algunos de ellos, por su sencillez, nos podrán aproximar a la idea intuitiva de una

forma más completa, estudiando desde el principio situaciones diversas y no sólo aquellas en las que la curva es positiva. Además, se podría eliminar la dificultad que tienen algunos alumnos al calcular el área bajo la curva no considerando el signo para regiones de la curva por debajo del eje de las abscisas, diferenciando entre la integral y el área.

En resumen, con esta propuesta de este tipo, se enriquecería el campo de problemas y los distintos significados institucionales surgirían de forma natural y la relación entre derivada e integral se podría establecer de forma intuitiva y no algebraica. Se potenciaría, en definitiva la no algebrización del cálculo integral y se daría una visión más amplia del concepto.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Artigue, M. (1998). L'évolution des problématiques en didactique de l'Analyse. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 18, n.º 2, págs. 231-262.
- Azcárate, C. y cols. (1996). *Cálculo diferencial e integral*. Madrid, Síntesis.
- Cantoral, R. (2000). *Pensamiento matemático avanzado: Una revisión de los enfoques a la investigación sobre Didáctica del Análisis*. Documento interno del CINVESTAV, México.
- Contreras, A. (2002). *Aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas (tfs) a la didáctica del análisis*. Seminario de Investigación, Universidad de Barcelona.
- Contreras, A. y cols.: (2000). *Estudio sobre la enseñanza-aprendizaje de conceptos fundamentales del análisis matemático –límite, continuidad, derivada e integral– en manuales y en estudiantes del Bachillerato-LOGSE y de primer curso universitario*. Proyecto de Investigación financiado por el C.I.D.E. del M.E.C.
- Contreras, A. y Font, V. (2002). ¿Se aprende por medio de los cambios entre los sistemas de representación semiótica? *XVIII Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas (SI-IDM)*, Universidad de Castellón, pp. 1-23.
- Contreras, A. y cols. (2003). *Análisis de manuales de 1.º y 2.º del Bachillerato-LOGSE en institutos de Educación Secundaria de la provincia de Jaén, en cuanto a los conceptos básicos del Cálculo Infinitesimal derivada e integral, bajo la perspectiva de la teoría de los obstáculos epistemológicos*. Instituto de Estudios Giennenses.
- Font, V. (1999). *Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de gràfiques aplicacions a les derivades*. Tesis Doctoral, Universitat de Barcelona.
- Godino, J. D. y Batanero, M. C. (1998). Funciones semióticas en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. *IX Seminario de Investigación en Educación Matemática (SIEM) de la Sociedad Portuguesa de Investigación en Educación Matemática*. Guimaraes (Portugal).
- Godino, J. D. (2001). *Un enfoque semiótico de la cognición matemática*. Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, pp. 1-38.
- González, M. (2002). *Sistemas simbólicos de representación en la enseñanza del Análisis Matemático: perspectiva histórica*. Tesis Doctoral, Universidad de Salamanca.
- Kang, W. y Kilpatrick, J. (1992). Didactic Transposition in Mathematics textbooks. *For the Learning of Mathematics*, 12, 1, pp. 2-7.
- Labraña, A. (2001). *Availacion das concepcións dos alumnos de COU e Bachalerato acerca do significado do Cálculo Integral*. Tesis Doctoral, Universidad de Santiago de Compostela.

- Love, E. y Pimm, D. (1996). «This is so»: a text on texts, en A. J. Bishop et als. (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education*, Chapter 10, pp. 371-409.
- Morgan, C. (1996). «The Language of Mathematics»: Towards a Critical Analysis of Mathematics Texts. *For the Learning of Mathematics*, pp. 2-10.
- Oordóñez, L. y Contreras, A. (2001). *Un acercamiento al estudio semiótico de la integral definida*. Documento interno. Departamento de Didáctica de la Matemáticas. Universidad de Granada.
- Sánchez, C. (1997). *Estudio estadístico sobre le proceso de enseñanza-aprendizaje de la noción de límite de una función*. Tesis Doctoral, Universidad de Granada.
- Sánchez C. y Contreras, A. (1995). Epistemología del concepto de límite. Análisis de manuales. VII Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas (JAEM), Madrid.
- Sánchez, C. y Contreras, A. (1998). Análisis de manuales a través del tratamiento didáctico dado al concepto de límite de una función: Una perspectiva desde los obstáculos, *Enseñanza de las Ciencias*, 17, 1, págs. 73-84.
- Schneider, M. (1988). *Des objets mentaux «aire» et «volume» au calcul des primitives*. Tesis Doctoral, Lovain-La-Neuve.
- Schubring, G. (1985). Essais sur l'histoire de l'enseignement des Mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 5, 3, págs. 343-385.
- Schubring, G. (1987). On the methodology of Analysing Historical Textbooks: Lacroix as texbook Author. *For the Learning of Mathematics*, 7, 3, págs. 41-51.
- Schubring, G. (1997). *Analysys of Historical Textbooks in Mathematics*. Departamento de Matemática, PUC do Rio de Janeiro.
- Sierra, M.; González, M. y López, M. C. (1999). Evolución histórica del concepto de límite funcional en los libros de texto de Bachillerato y Curso de Orientación Universitaria, *Enseñanza de las Ciencias*, 17(3), pp. 463-476.
- Turégano, P. (1993). *Los conceptos en torno a la medida y el aprendizaje del Cálculo Infinitesimal*. Tesis doctoral, Universidad de Valencia.
- Turégano, P. (1998). Del área a la integral. Un estudio en el contexto educativo. *Enseñanza de las Ciencias*, 116 (2), pp. 233-249.
- Wenzelburger, E. (1993). Introducción de los conceptos fundamentales del Cálculo Diferencial e Integral. Una propuesta didáctica. *Educación Matemática*, Vol. 5, pp. 93-123.