

CONCEITOS ELEMENTARES EM GEOMETRIA: QUE DEFINIÇÃO ESCOLHER?

ALEXANDRA GOMES
ELFRIDA RALHA

RESUMO

As definições desempenham um papel fundamental na actividade matemática, constituindo não só peças fundamentais da estrutura axiomática mas sendo também componentes básicas do raciocínio lógico dos indivíduos. Isto implica uma profunda compreensão, por parte dos professores de Matemática, da natureza das definições, do seu papel e das suas características.

Neste estudo foram analisadas as respostas apresentadas por 216 (futuros) professores do 1º ciclo em Portugal a uma questão (parte de um questionário) envolvendo definições de um conceito elementar de Geometria.

ABSTRACT

Definitions play an important role in mathematical activity, being not only essential elements of the axiomatic structure but also basic components of the individuals' logic reasoning. This implies that Mathematics teachers should have a deep understanding of the nature of definitions, its role and its characteristics.

In this study we analyse the answers given by 216 (future) primary teachers to a question (part of a questionnaire) involving definitions of an elementary geometrical concept.

INTRODUÇÃO

De acordo com a separação dos conteúdos curriculares feita por Hewitt (1999), as definições podem ser consideradas conteúdos necessários uma vez que podem ser construídas pelos alunos (por oposição aos conteúdos que têm que ser transmitidos). Cabe ao professor proporcionar actividades significativas de modo a que os alunos construam esse conhecimento. Entre outras coisas, pressupõe-se que o pro-

fessor de Matemática é conhecedor da coexistência de várias definições alternativas para um mesmo conceito e entende que a opção por uma delas tem consequências em termos de organização dos conceitos. Contudo, Linchevsky et al (1992) concluíram que muitos futuros professores não estão conscientes do carácter arbitrário das definições e que, além disso, podem chegar a cometer erros graves em conceitos geométricos básicos. Por outro lado, Liping Ma (1999) concluiu que a compreensão mais profunda da Matemática fundamental se desenvolve com a experiência e não na formação inicial.

Pareceu-nos pois importante confrontar não só alunos universitários (futuros professores) mas também professores experientes com a problemática das definições.

DEFINIÇÃO COMO ACTIVIDADE MATEMÁTICA

Há alguns princípios lógicos que devem ser considerados quando se define um conceito, nomeadamente Winicki & Leikin (2000) e Vinner (1991) referem que:

1. Uma definição estabelece simultaneamente condições necessárias e suficientes.
2. O conjunto de condições de uma definição deve ser minimal¹.
3. As definições são arbitrárias, no sentido de que, estabelecendo uma relação de equivalência entre as condições relacionadas com um dado conceito obtemos uma classe de equivalência de definições e portanto cada uma dessas definições pode ser tomada arbitrariamente como a definição do conceito².

Para Freudenthal (1973), definir é mais do que descrever, é um meio de organizar dedutivamente as propriedades de um objecto. A definição relaciona o objecto com todos os outros construindo assim um sistema orgânico de definições. Contudo, segundo Mariotti & Fischbein (1997), esta sistematização teórica é apenas a fase final de um longo processo produtivo no qual as definições resultam de negociações entre o rigor lógico e a criatividade.

Tall e Vinner (1981) utilizaram os termos «definição do conceito» («concept definition») e «imagem do conceito» («concept image») para distinguir respectivamente entre o significado de um conceito tal como este é estabelecido pela comunidade científica e o significado/interpretação subjectiva que cada indivíduo lhe atribui. Os autores definem «imagem do conceito» como a estrutura cognitiva que está associada ao conceito e que inclui todas as figuras mentais e as propriedades e processos associados. Esta imagem do conceito vai sendo construída e modificada

¹ Este é, na opinião de Linchevsky et al (1992), um aspecto fundamental da estrutura da Matemática como sistema dedutivo uma vez que modela a maneira como a Matemática progride quando é apresentada dedutivamente.

² A arbitrariedade da definição por vezes é encarada de outra forma. É possível considerar definições não equivalentes desde que se aceitem pequenas alterações em certas propriedades. Essas definições correspondem, cada uma, a diferentes pontos de vista e originam uma sistematização diferente dos conceitos.

pelo indivíduo ao longo dos anos através das suas experiências e maturação. A evolução da imagem do conceito nem sempre ocorre de forma coerente. Quando o indivíduo está perante uma dada situação, um dado conceito, apenas uma porção da imagem do conceito é evocada, podendo acontecer que em momentos diferentes mas para um mesmo conceito, porções distintas da imagem do conceito sejam evocadas, podendo mesmo ser imagens conflituosas. Contudo, o indivíduo só se apercebe dessa conflituosidade se as imagens forem invocadas em simultâneo.

Quanto à «definição do conceito» Tall e Vinner (ibidem) consideram ser um conjunto de palavras usadas para especificar o conceito.

A definição de um conceito gera, em cada indivíduo, uma determinada imagem que está contida na imagem do conceito. Essa imagem, que representa apenas parte do conhecimento que o indivíduo tem do conceito, é frequentemente diferente da definição formal do conceito. Na opinião de Vinner (1997), a imagem do conceito surge na mente do indivíduo de modo intuitivo e como reacção ao nome do conceito. Essa intuição é imediata, espontânea e não utiliza processos analíticos sendo por isso, em muitos casos, enganosa.

Tall (1991) conclui que:

«Our cognitive studies have shown the manifold differences between the formal definitions of concepts and the images we use in our minds to work with these concepts» (p. 252).

Assim, não é de estranhar que indivíduos diferentes tenham por vezes distintos entendimentos de um mesmo conceito. No entanto Vinner (1991), tal como Hewitt (1999), defendem que o conhecimento da definição formal é fundamental em particular na identificação de exemplos e contra-exemplos de um conceito, na resolução de problemas e nas demonstrações.

O ESTUDO

O estudo que aqui se apresenta faz parte de um questionário que foi realizado por 216 formandos do Instituto de Estudos da Criança, na Universidade do Minho. Os sujeitos pertenciam a dois grupos: 141 eram alunos universitários, que frequentavam o curso de formação inicial de professores do 1.º ciclo³ e os restantes 75 eram professores do 1.º ciclo inscritos em cursos de Complemento de Formação. Utilizámos como objecto de estudo as definições em Geometria porquanto:

- a Geometria surge como tópico de apresentação continuada quer ao longo da formação geral quer ao longo da formação específica dos sujeitos participantes no estudo;
- a Geometria é tópico fundamental de ensino no 1º ciclo.

³ Em Portugal o 1º ciclo do ensino obrigatório destina-se a crianças dos 6 aos 10 anos.

Foram objectivos deste estudo:

- a identificação de factores que levam um sujeito a preferir uma definição;
- a avaliação, no sujeito, do conhecimento das características que deve ter uma definição;
- a averiguação da influência das experiências escolares e profissionais nas respostas.

Neste estudo analisar-se-ão as respostas dadas pelos intervenientes à questão:

Das seguintes definições de paralelogramo, assinale a que considera mais adequada. Justifique a sua escolha.

- A. Um paralelogramo é um quadrilátero com os lado opostos paralelos e com ângulos e lados não todos iguais.
- B. Um paralelogramo é um quadrilátero com lados opostos iguais e paralelos, ângulos opostos iguais e diagonais não perpendiculares que se bisectam.
- C. Um paralelogramo é um quadrilátero com lados opostos paralelos.

Nesta questão eram dadas várias definições não equivalentes de um quadrilátero familiar - o paralelogramo.

Conforme a definição adoptada, os quadriláteros podem ser classificados de diferentes modos. De Villiers (1994) refere duas classificações: a hierárquica e a partitiva. Na classificação hierárquica os rectângulos e os losangos são subconjuntos dos paralelogramos (sendo os quadrados a intersecção de rectângulos e losangos). Por oposição, na classificação partitiva, os quadrados não são rectângulos nem losangos e os rectângulos e losangos não são paralelogramos.

Neste sentido, a 1.^a definição dada é partitiva, a 3.^a é hierárquica e a 2.^a corresponde a uma situação «mista».

Observe-se que, sendo as definições arbitrárias, na medida em que existem várias definições alternativas, nenhuma das definições dadas se pode considerar errada. Contudo, em nosso entender, é importante ter consciência de que as definições dadas são claramente diferentes dando origem a sistemas dedutivos distintos e que a opção por qualquer uma das definições acarreta consequências.

Deve também ser percebido, como defende De Villiers (1994, 1998), que a adopção de uma definição hierárquica tem inúmeras vantagens representando por isso uma evolução no pensamento dos indivíduos. Estabelecendo um paralelo com a teoria de van Hiele⁴, pode dizer-se que, enquanto uma definição partitiva é característica de indivíduos no nível 2, as definições hierárquicas são tipicamente do nível 3.

⁴ Ver, por exemplo, Gutiérrez & Jaime (1991).

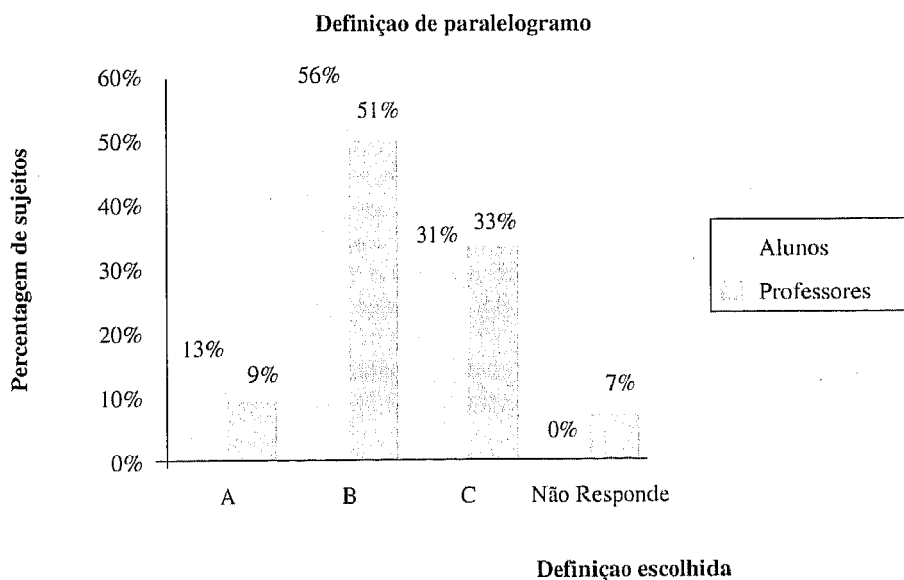
RESULTADOS

Na tabela seguinte apresenta-se a distribuição das respostas por ano.

Definição	Curso de Formação Inicial				Complemento de Formação			
	1.º ano	2.º ano	3.º ano	4.º ano	LM	EM	Mat	Total
A	3	7	3	5	0	7	0	25
B	19	17	19	24	13	12	13	117
C	10	9	19	6	6	7	12	69
Não resp.	0	0	0	0	3	1	1	5

A definição mais escolhida foi a B com 54,2%. Seguiu-se a C com 31,9% das preferências e a A com 11,6%. 5 professores não responderam.

No seguinte gráfico apresentam-se as percentagens das respostas, por grupos:



A análise das respostas dadas suscitou-nos várias reflexões:

1. A definição mais escolhida foi, nos dois grupos, a B. Esta escolha parece indicar que os indivíduos fazem a sua escolha baseada no número de propriedades contidas na definição.
Será que consideram que quantas mais propriedades tiver uma definição, melhor ela é?

2. A definição A foi a menos escolhida o que pode indicar uma rejeição da definição partitiva (De Villiers, 1998).
Estarão os indivíduos conscientes do seu carácter partitivo?
3. E os indivíduos que optaram pela definição C, será que a associam com a classificação hierárquica dos quadriláteros?
4. Finalmente, que figuras são consideradas como paralelogramos? Será que consideram o rectângulo como paralelogramo? E o quadrado?

Para uma clarificação das respostas decidimos entrevistar alguns dos sujeitos.

ANÁLISE DAS ENTREVISTAS

1. Razões evocadas para a escolha feita:

De um modo geral a escolha das definições A ou B foi justificada por parecerem mais completas, enquanto que a definição C foi rejeitada precisamente por estar incompleta, como que se uma das características intrínsecas de uma definição fosse o número de palavras nela incluídas.

Contudo, alguns dos sujeitos não têm qualquer motivo para a opção que fazem, escolhendo uma das definições ao acaso. Observem-se os seguintes exemplos:

- Dora (aluna) - Elas [as definições] confundiram-me um bocado. Eram todas muito parecidas. O que me levou a escolher esta?... Sinceramente agora já não me lembro porque é que eu escolhi esta...
- Gina (professora) - Pronto, eu vou-lhe ser sincera que esta parte aqui passou-me um bocado ao lado. Eu olhei até aqui e disse assim, bem deve ser qualquer coisa do género assim. E por isso é que pus.

Esta atitude é, a nosso ver, preocupante porquanto denota uma falta de rigor e inclusivé indiferença pelo papel da definição.

2. Desconhecimento do conceito

A noção de paralelogramo é uma das noções básicas da Geometria pelo que o desconhecimento desta noção nos parece ser uma falha grave. Mais ainda porque, sendo estes sujeitos (futuros) professores, são responsáveis pela introdução dos primeiros conceitos matemáticos e, no entanto, escolhem a definição ao acaso.

Observem-se as reacções dos seguintes entrevistados:

- Lino (professor) - O paralelogramo é um polígono com v*rios lados, não é? ... Tem 4, não é? ... E não tem que ser um rectângulo ou um quadrado, não é?
- Ana (aluna) - ... É que a minha ideia é que tem que ser algo muito, não sei,... aquilo a que estamos habituados é o quadrado, é o rectângulo e que não é

propriamente nada disso... L^* est*, como é uma figura menos conhecida, não é aquela que nós pensamos logo...

- Nuno (aluno) - J^* nem sei... Não faço ideia. Sinceramente, não faço ideia. ... Sei I^* , tem a ver com um polígono mas que tem ângulos rectos, para..., não, que tem ângulos, sei I^* , paralelos...

Note-se contudo que nenhum destes sujeitos deixou de responder à questão, tendo escolhido uma definição de paralelogramo. Perguntámo-nos por isso, que critérios usaram, uma vez que desconhecem o conceito?

3. Desfasamento entre a imagem do conceito e a definição do conceito

Parece que os indivíduos por vezes têm uma imagem do conceito que não é coincidente com a definição que escolhem. De uma maneira geral podemos dizer que a imagem que estes indivíduos possuem do conceito de paralelogramo corresponde à definição hierárquica. Contudo tal imagem não se manifesta quando têm de optar por uma definição. Não só a imagem que têm do conceito não se reflecte na escolha da definição como a definição escolhida não parece interferir na imagem que têm do conceito. Os exemplos seguintes mostram como os participantes, apesar de considerarem certos quadriláteros como paralelogramos, escolhem uma definição que não os inclui:

- I - Um rectângulo é um paralelogramo?
Mara (aluna) - Acho que sim.
I - E o rectângulo obedece a estas características da 1.ª definição?
Mara - Não.
- Carla (aluna) - Um rectângulo é um paralelogramo... sim.
I - Obedece a todas essas condições [definição B]?
Carla - Não.
- I - Então quer dizer, na sua ideia, um rectângulo é um paralelogramo?
Marta (aluna) - ...Pois...
I - De acordo com essa definição [A], é ou não é?
Marta - Com esta não é.
I - Com esta não é. Mas na sua ideia, seria?
Marta - Acho que é!

4. Relação entre a definição e a representação do conceito

Alguns indivíduos, quando se lhes pede para definir um dado conceito, são incapazes de o fazer, optando por apresentar uma representação em forma de diagrama:

- I - Então como é que define um losango?
Joana (aluna) - Posso antes desenhar?

- I - Não disse foi porquê que escolheu essa [definição 2] e não qualquer uma das outras.

Maria (aluna) - Não disse porque não consegui dizer. Sempre fui habituada a fazer através de desenho e fiz o desenho, correspondeu a este e por isso escolhi este.

5. *Dificuldades de natureza lógica*

Alguns indivíduos apresentam dificuldades em interpretar a linguagem lógica presente nas definições, confundindo implicações com equivalências, como se vê nos seguintes casos:

- Carla (aluna) - Porque são todos iguais, ângulos rectos, enquanto aqui diz que são os ângulos opostos iguais.
- Fátima (aluna) - Porque se fosse um quadrado não teria lados opostos iguais mas todos os lados iguais, não é, porque o quadrado tem 4 lados iguais e os ângulos também são todos iguais, não é só os opostos ...
- Jacinta (professora) - Não, porque aqui o rectângulo tem os lados opostos iguais dois a dois e aqui não, aqui opostos, iguais e paralelos. Subentende-se que sejam todos iguais.

Alguns dos indivíduos entrevistados invertem a hierarquia dos quadriláteros, isto é, consideram o paralelogramo como caso particular do rectângulo e o losango como caso particular do quadrado.

Exemplo:

- I - E o rectângulo é um caso particular do paralelogramo?
Sara (aluna) - O paralelogramo é que é um caso particular.
.. O losango é um caso particular do quadrado.

Alguns sujeitos não conseguem determinar se um dado elemento obedece às propriedades enunciadas na definição.

- I - E se fosse um quadrado, também consideraria um paralelogramo?
Maria (professora) - Eu penso que sim.
I - O quadrado obedece a todas estas condições da definição?
Maria- É um quadrilátero, com lados opostos iguais e paralelos, ângulos opostos iguais e diagonais não perpendiculares que se bissectam. Acho que sim.
I - Também considera um losango um paralelogramo?
Maria - Um losango, eu penso que sim. É um quadrilátero, tem lados opostos iguais e paralelos mas os ângulos... os opostos também são iguais, e diagonais não perpendiculares que se bissectam, acho que sim.

CONCLUSÃO

Na prática lectiva, os professores têm frequentemente de decidir qual a definição mais adequada de entre as várias de que dispõe, por exemplo, nos manuais escolares. Esta decisão parece-nos seriamente comprometida pois, como vimos neste estudo, não só os futuros professores mas também os professores experientes do 1.º ciclo têm um fraco (e por vezes errado) entendimento da definição de conceitos básicos. Estas constatações conduzem-nos, necessariamente, a um repensar da formação destes sujeitos no sentido de os envolver em experiências específicas que explorem as interações entre as definições e os objectos (conceitos) definidos e vice-versa.

BIBLIOGRAFIA

- De Villiers (1994). The role and function of a hierarchical classification of quadrilaterals. *For the Learning of Mathematics* 14, 11-18.
- De Villiers (1998). To teach definitions in Geometry or teach to define? In *Proceedings of PME 22* (South Africa), vol. 2, pp. 248-255.
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: Reidel
- Gutiérrez, A. & Jaime, A. (1991). El modelo de razonamiento de Van Hiele como marco para el aprendizaje comprensivo de la geometría. Um exemplo: los giros. *Educación Matemática*, vol. 3, n.º 2, pp. 49-65.
- Hewitt, D. (1999). Arbitrary and necessary. Part 1: a way of viewing the mathematics curriculum. *For the Learning of Mathematics*, 19(3), 2-9.
- Linchevsky, L., Vinner, S. & Karsenty, R. (1992). To be or not be minimal? Student teachers' views about definitions in geometry. In *Proceedings of PME 16* (USA), vol. 2, pp. 48-55.
- Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics*. New Jersey: LEA.
- Mariotti, M. & Fischbein, E. (1997). Defining in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics* 34(3), 219-248.
- Tall, D. (1991). Reflections. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity, *Educational Studies in Mathematics* 12, 151-169.
- Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Vinner, S. (1997). From intuition to inhibition - mathematics, education and other endangered species. In *Proceedings of PME 21*(Finland), vol. 1, pp. 63-78.
- Winiki, G. & Leikin, R. (2000). On equivalent and non-equivalent definitions: part 1. *For the Learning of Mathematics* 20(1), 17-21.