

# EL MÉTODO DE INVESTIGACIÓN HISTÓRICO EN LA DIDÁCTICA DEL ANÁLISIS MATEMÁTICO

M.<sup>a</sup> TERESA GONZÁLEZ ASTUDILLO  
MODESTO SIERRA VÁZQUEZ

## 1. INTRODUCCIÓN

Desde hace aproximadamente unos quince años, dentro del ámbito de la investigación en educación matemática, una corriente que está resultando especialmente atractiva, apasionante y fructífera es la relacionada con la investigación histórica. Aunque todavía hay pocos investigadores involucrados en ella, quizás por desconocimiento del propio método de investigación que es muy específico, ya se han obtenido algunos resultados importantes. Si hemos de empezar por el principio, debemos de formular las siguientes preguntas: ¿qué entendemos por investigación histórica en educación?, ¿cuáles son las características y fases que definen el método de investigación histórico?, ¿qué resultados se están obteniendo en España? Trataremos de responder a estas preguntas revisando nuestra propia investigación histórica en educación matemática, procurando escoger episodios significativos que ilustren el tema. Así, iremos exponiendo en relación con cada etapa de la investigación histórica las características de alguna de nuestras investigaciones, permitiéndonos la licencia de incluir aspectos relativos a otras fases y de avanzar algunas de las conclusiones establecidas en dicha investigación, con el fin de saciar la posible curiosidad que surja en torno al tema.

¿Qué es la investigación histórica? Según Fox (1981), la investigación histórica en educación es una labor útil y actual caracterizada por tratar de aclarar problemas de interés actual mediante un estudio intensivo de materiales ya existentes. El planteamiento más conocido y más claro de una investigación histórica se da en las fases en las que se trata de descubrir materiales desconocidos por las generaciones precedentes, pero el aspecto más importante es la reinterpretación de los acontecimientos a la luz de las nuevas técnicas e informaciones. Durante una investigación histórica, el investigador debe tener «la flexibilidad suficiente para ir en contra de

los planteamientos vigentes y ser capaz de descubrir una nueva relación, explicación o intuición, si existe en los datos». (p. 459).

Concretando un poco más, para Cohen y Manion (1990) es «la situación, evaluación y síntesis de la evidencia sistemática y objetiva con el fin de establecer los hechos y extraer las conclusiones acerca de acontecimientos pasados». El pasado «además incluye no sólo hechos y acontecimientos, sino también estructuras y procesos, sincronías y diacronías de distinta naturaleza y espesor» (Viñao, 1997, p. 27).

Más sugerente, por las posibilidades que se abren, es considerar la investigación histórica como un proceso de búsqueda sistemática de datos que respondan preguntas acerca de fenómenos del pasado con el propósito de alcanzar una mejor comprensión de instituciones, prácticas, tendencias y en nuestro caso aspectos relacionados con la educación (Gall *et al.*, 1996). Una característica diferenciadora de la investigación histórica en educación respecto de otros tipos de investigación educativa es que el historiador descubre información a través de la búsqueda de fuentes históricas tales como textos, diarios, documentos oficiales y reliquias. En la investigación histórica, entonces, las fuentes están disponibles antes que el historiador formule una tesis, seleccione un tópico y designe un plan de investigación. El problema, a veces, es localizar las fuentes y obtener autorización para utilizarlas.

Desde nuestro punto de vista,

«el análisis histórico cumple varias funciones: en primer lugar pone de manifiesto que las nociones matemáticas no se han desarrollado de manera aislada, sino conectadas unas con otras; en segundo lugar, muestra el contexto de problemas en los que han aparecido los conceptos, y en tercer lugar, nos hace comprender que el desarrollo no ha sido lineal, sino con avances, retrocesos e indecisiones, nos da cuenta, en definitiva, de las concepciones que han aparecido a lo largo de la historia de la matemática» (Sierra, González y López, 2002).

¿Cuáles son las características y fases que definen el método de investigación histórico? El método de investigación histórico está determinado por una fases bien delimitadas que reciben unas denominaciones ya clásicas. Dichas fases son:

- Planteamiento de la investigación.
- Heurística. Crítica.
- Análisis de la documentación.
- Hermeneútica.
- Exposición.

Iremos describiendo cada una de estas fases y relacionándolas con algunas de nuestras investigaciones.

## 2. PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACIÓN

En la primera fase de *planteamiento de la investigación*, se **delimita** el tema de investigación que incluye: elección del **tema de investigación**, conocimiento del **estado de la cuestión**, determinación de la **línea de investigación** (en el marco de

un programa de investigación), establecimiento de los **periodos de tiempo** que se van a investigar desde el punto de vista pedagógico más que histórico-político, y el aspecto fundamental que consiste en un primer **sondeo de los fondos documentales** que existen, y que se pueden localizar para establecer las posibilidades que brinda dicho material. Este sondeo permite establecer el futuro de la investigación y formular unas hipótesis iniciales. Una vez contemplados los aspectos anteriores, es el momento adecuado para delimitar las fases de la investigación.

### Episodio 1. *Algunos aspectos epistemológicos del concepto de límite*

En los años 1995 a 1997 desarrollamos un proyecto de investigación financiado por el CIDE (Centro de Investigación y Documentación Educativa) del MEC y por la Junta de Castilla y León bajo el título «*Los conceptos de límite y continuidad en educación secundaria: transposición didáctica y concepciones de los alumnos*», uno de cuyos objetivos era:

«Descubrir las concepciones que tienen los alumnos de secundaria sobre los conceptos de límite y continuidad, y encontrar las posibles relaciones entre ellas y las concepciones que han aparecido a lo largo de la historia de la matemática»

Utilizamos como punto de partida para iniciar la investigación los estudios de Cornu (1983), Sierpinski (1985, 1987), El Bouazzoui (1988) que demuestran que existe una estrecha relación entre las dificultades de los alumnos en relación con los conceptos de límite y continuidad respectivamente, y los problemas de la construcción del conocimiento matemático a lo largo de la historia. La investigación se diseñó trazando dos líneas paralelas de estudio: por un lado se elaboraron sendos cuestionarios (uno relativo al límite y otro referente a la continuidad) que nos permitieron analizar las concepciones de los alumnos en torno a estos dos conceptos. Simultáneamente, se hizo el estudio histórico de estos conceptos. Los primeros sondeos a partir de los cuales establecimos las posibilidades de esta investigación fueron fundamentalmente fuentes secundarias como: Boyer (1986), Bourbaki (1972), Dhombres *et al.* (1987), Dugac (1981), Grattan-Guinness (1984), El Bouazzoui (1988), Rey Pastor y Babini (1981), Youskchevitz (1976). Establecimos que el periodo de tiempo en el que se iba a centrar nuestra investigación comprendería desde las primeras intuiciones de los matemáticos en torno a estos conceptos hasta las definiciones formales de principios del siglo XX. Viene marcado por diferentes etapas en las que ha predominado una cierta concepción que, en síntesis, son las siguientes en relación con el concepto de límite:

1. La concepción de los matemáticos hasta finales del siglo XVII con la idea de aproximarse mediante procesos geométricos iterados que podemos encontrar en el método de exhaustión de Eudoxo o en la comparación de áreas de círculos de Hipócrates de Chíos.
2. La concepción de Euler y Lagrange, donde la atención se centra exclusivamente en los aspectos relacionales de la función sin tener en cuenta los entornos.

3. La concepción de D'Alembert y de Cauchy, que está relacionada con la idea de «aproximarse». Tanto en la definición de D'Alembert como en la de Cauchy se expresa el concepto de límite como «cantidades variables que se aproximan a una fija difiriendo de ella en menos de una cantidad dada» aunque en D'Alembert el límite no se puede alcanzar y en Cauchy es alcanzable.
4. La concepción de Weierstrass que corresponde al proceso de aritmetización del Análisis Matemático.
5. La concepción topológica de Hausdorff.

Además, como ya se ha dicho, se estudiaron las concepciones de alumnos de 2º de BUP y COU acerca del límite y la continuidad, estableciéndose diez criterios de justificación para el límite. Entre las concepciones que tienen los alumnos en relación con el concepto de límite algunas podemos identificarlas con las concepciones históricas 2, 3 y 4, siendo las dos primeras muy próximas a los criterios de justificación utilizados por los alumnos en sus respuestas al cuestionario propuesto. Por ello, una de las conclusiones establecidas en esta investigación fue que «el sentido común que evoca el concepto de límite, favorece una concepción del límite como barrera intraspasable y no alcanzable».

### 3. LA HEURÍSTICA

La fase correspondiente a la *heurística* es en la que se lleva a cabo la búsqueda y selección de fuentes documentales, que serán todos aquellos documentos que nos den noticias del pasado educativo. Pueden ser documentos escritos, sonoros, pictóricos, audiovisuales, arquitectónicos, de mobiliario, de útiles escolares... Entre los primeros debemos abarcar una gama bastante amplia: inscripciones, correspondencia, diarios, memorias, informes, reglamentos, planes, cartas, bulas, libros de texto, apuntes, enciclopedias, periódicos, revistas, guías, libros de actas, registros... Entre los sonoros: discos, cintas, bandas sonoras... Entre los pictóricos: grabados, cuadros, dibujos, fotografías, diapositivas, películas, microfilms... Entre los arquitectónicos: edificios, aulas, bibliotecas... En cuanto al mobiliario: pupitres, mesas, bancos... Entre los útiles escolares: tablillas, punzones, plumas, tinta, tiza, lapiceros, pizarras, mapas, reglas, carteras, carpetas...

Para localizar estos documentos tenemos en España diferentes archivos, especialmente en los cuatro grandes Archivos históricos: el Nacional, el de Simancas (Edad Moderna y Reino de Castilla), el de la Corona de Aragón y el de Indias; Archivos de los antiguos Reinos, el de Alcalá de Henares (Administración), archivos militares y los de las diferentes Universidades así como numerosas bibliotecas provinciales, municipales, de universidades, de institutos. También hay que tener en cuenta los repertorios bibliográficos y catálogos de bibliotecas.

Una vez localizadas las fuentes hay que clasificarlas y seleccionarlas tanto para que no se produzcan vacíos documentales como para que no haya redundancias y realizar la crítica histórico pedagógica, necesaria para comprobar la autenticidad y exactitud de las fuentes documentales.

*Episodio 2. El concepto de límite en los libros de texto de secundaria*

Durante los últimos años se ha puesto de manifiesto la importancia del análisis del libro de texto como reflejo de la actividad que se realiza en el aula. De acuerdo con Schubring (1987), si se parte del hecho de que la práctica de la enseñanza no está tan determinada por los decretos y órdenes ministeriales como por los libros de texto utilizados para enseñar, se llega a la necesidad de un análisis de dichos libros de texto. La producción abundante de manuales, la variedad y riqueza de sus contenidos, la incidencia en el aula de este material, su función como transmisor de contenidos socialmente aceptados, hace que resulte interesante estudiar la contribución que han tenido en la historia de la educación matemática.

En nuestro trabajo hemos realizado un análisis de libros de texto estudiando los cambios que se han producido a lo largo de más de cincuenta años en un concepto clave para la enseñanza del Análisis Matemático como es el de límite funcional (Sierra, González y López, 1999; 2001). El uso de diversas ediciones de algunos libros analizados, su comparación con otros libros del mismo periodo y su relación con los programas oficiales de su momento nos proporcionaron los datos esenciales para concretar cuál ha sido la evolución de dicho concepto.

Hemos localizado y seleccionado libros publicados desde la Guerra Civil hasta nuestros días. De acuerdo con Schubring (1987), la producción de libros de texto se lleva a cabo dentro de un contexto determinado y responde a las corrientes epistemológicas y didácticas al uso, además, existiendo en el caso español disposiciones legales sobre el currículo, los libros de texto tienden a adaptarse a ellas. Por esta razón, se analizaron los planes de estudio. Para indagar acerca de la inclusión de estos conceptos en la educación secundaria en España, utilizamos fuentes secundarias como: Utande (1964), García (1980), Cuesta (1985), Díaz de la Guardia (1988), Hormigón (1991), Rico y Sierra (1994), Cobos (1995), Vea (1995), que nos permitieron repasar la historia de la educación en España durante los siglos XIX y XX. Estos nos sirvió para localizar los planes de estudio en las Gacetas y Boletines correspondientes, para establecer la fiabilidad de los datos obtenidos y para determinar los conceptos de Análisis Matemático que contemplaban dichos planes de estudio; los planes de estudio, así localizados, son ya fuentes primarias.

- Gaceta de Madrid de 21 de octubre de 1934 (Cuestionarios del plan de 1934).
- Boletín Oficial de 10 de febrero de 1954 (Cuestionarios del plan de 1953).
- Boletín Oficial del Ministerio de Educación y Ciencia de 5 de octubre de 1967 (Cuestionarios reformados del Bachillerato Elemental del plan de 1953).
- Boletín Oficial del Estado de 18 de Abril de 1975 (Cuestionarios de BUP).
- Boletín Oficial del Estado de 17 de marzo de 1978 (Cuestionario de COU).
- Boletín Oficial del Estado de 29 de enero de 1988 (COU, nueva ordenación).
- Boletín Oficial del Estado de 21 de octubre de 1992 (Currículo de Bachillerato LOGSE).

Los libros se han agrupado en periodos que en términos generales corresponden a los sucesivos planes de estudio. El criterio para su selección fue el de los autores

más famosos o las editoriales más importantes en cada uno de los periodos, también se procuró que los autores elegidos tuvieran producción en los distintos periodos para poder estudiar la evolución del concepto de límite.

Los periodos y los libros seleccionados han sido los siguientes:

1. *Periodo comprendido entre 1934 y 1967*. Abarca desde el final de la Guerra Civil hasta 1967 en que se publican los textos piloto para la introducción de la matemática moderna en el bachillerato. Durante este periodo estuvieron vigentes dos planes de estudio: el de 1938 que se promulga durante la Guerra Civil y se modifica en el de 1953. El concepto de límite aparece en los cuestionarios de sexto curso dentro del bloque de Análisis. Los libros analizados se agruparon en dos bloques determinados por el tratamiento diferenciado que se hace del concepto de límite: mientras que los libros del bloque A se parte de la noción de sucesión y el concepto de variable, en los libros del Bloque B, el concepto de límite adquiere un status propio.

<i>Bloque A</i>	<i>Bloque B</i>
<ul style="list-style-type: none"> <li>- Fernández de Castro, M. y Jiménez Jiménez, J. L. <i>Matemáticas. Preparación del examen de estado</i>. Escelicer. Cádiz-Madrid. (sin fecha, anterior a 1955)</li> <li>- Bruño. <i>Matemáticas 6º curso</i>. Ediciones Bruño. Madrid. 1968.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Ríos, S. y Rodríguez San Juan, A. <i>Matemáticas. 6º curso de bachillerato</i>. Los autores. Madrid. 1950.</li> <li>- Ríos, S. y Rodríguez San Juan, A. <i>Matemáticas. 5º curso de bachillerato</i>. Los autores. Madrid. 1968a.</li> <li>- Ríos, S. y Rodríguez San Juan A. <i>Matemáticas. 6º curso de bachillerato</i>. Los autores. Madrid. 1968b.</li> </ul>

2. *Introducción de la matemática moderna (1967-1975)*. Este periodo abarca desde la introducción de la matemática moderna hasta la implantación del Bachillerato Unificado Polivalente (BUP) en 1975. Viene marcado por la constitución en el año 1962 de la Comisión para el Ensayo Didáctico sobre la Matemática Moderna en los Institutos Nacionales de Enseñanza Media presidida por el profesor Abellanas. Esta Comisión editó en los años 1967 y 1969 *textos piloto* para 5º y 6º curso de bachillerato respectivamente, y se convirtieron, de hecho, en un nuevo programa de matemáticas que progresivamente se fue implantando en el bachillerato y cuyos cimientos eran la teoría de conjuntos y las estructuras matemáticas en sentido bourbakista. Los libros de este periodo se agruparon en tres bloques que siguen tres tendencias claramente diferenciadas: así los libros del bloque A mantienen el modelo correspondiente al periodo anterior, los del bloque B comprenden los textos piloto y los que siguen sus orientaciones e ideas, y los del bloque C aunque introducen una matemática estructural y axiomática, también proponen actividades a los alumnos y las explicaciones se apoyan en ellas.

<i>Bloque A</i>	<i>Bloque B</i>	<i>Bloque C</i>
<ul style="list-style-type: none"> <li>- Sin autores. <i>Matemáticas sexto curso</i>. Edelvives: Zaragoza, 1972 (aprobado por OM 23-2-68).</li> <li>- Segura, S. <i>Matemáticas 6º curso</i>. ECIR: Valencia, 1974.</li> <li>- Tuduri, J. y Casals R. <i>COU Matemáticas especiales</i>. Vimsa: Terrasa, 1974.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Abellanas, P., García Rúa, J., Rodríguez Labajo, A., Casulleras Regás, J. y Marcos de Lanuza, F. <i>Matemática Moderna. Quinto curso</i>. MEC Madrid, 1967.</li> <li>- Abellanas, P., García Rúa, J., Rodríguez Labajo, A., Casulleras Regás, J. y Marcos de Lanuza, F. <i>Matemática Moderna. Sexto curso</i>. MEC Madrid, 1969.</li> <li>- Marcos de Lanuza, F. <i>Matemáticas 5º curso</i>. G del Toro: Madrid, 1972a.</li> <li>- Marcos de Lanuza, F. <i>Matemáticas COU optativa</i>. G del Toro: Madrid, 1972b.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Agustín, J. M. y Vila, A. <i>Matemáticas 6º Bachillerato, Vol 2</i>. Vicens Vives: Barcelona, 1973.</li> <li>- Marcos, C. y Martínez, J. <i>Matemáticas generales COU. SM: Valencia, 1973.</i></li> </ul>

3. *Desarrollo del plan de estudios de Bachillerato Unificado y Polivalente (BUP) y del Curso de Orientación Universitaria (COU) (1975-1995)*. Este periodo está asociado a la Ley General de Educación y Financiación de la Reforma Educativa promulgada el 4 de agosto de 1970; sin embargo, hasta el año 1975, no se estableció el currículo para el nuevo bachillerato (decreto del 23 de enero de 1975, desarrollado en el BOE del 18 de abril del mismo año). El concepto de límite aparece en los documentos oficiales en 2º curso, sugiriendo como orientación didáctica introducirlo de forma métrica en contraposición con la orientación topológica del periodo anterior, y, en cambio, reducir el cálculo de límite a casos sencillos. Los libros de este periodo se han distribuido en cuatro bloques: los libros del bloque A continúan la línea iniciada en el periodo anterior, en los libros del bloque B se impone la tendencia de la matemática moderna, una metodología diferente es la que presenta el Grupo Cero de Valencia siguiendo la fenomenología didáctica de Freudenthal, mientras que en los libros del último bloque está presente la influencia de nuevos planteamientos que se concretarán en la ley venidera.

Bloque A	Bloque B	Bloque C	Bloque D
<ul style="list-style-type: none"> <li>- Marcos de Lanuza, F. <i>Matemáticas 2º B.U.P.</i> G del Toro: Madrid, 1978.</li> <li>- Marcos de Lanuza, F. <i>Matemáticas especiales, COU.</i> G del Toro: Madrid, 1976.</li> <li>- Agustí, J. M. y Vila, A. <i>Matemáticas. Vectores, 2º BUP.</i> Vicens Vives: Barcelona, 1976.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Guillén, J., Navarro, R., Peña, J. A. y Ferrer, S. <i>Matemáticas 2º Bachillerato.</i> Magisterio: Madrid, 1976</li> <li>- Boadas, J., Romero, R. y Villalbí, R. <i>Matemáticas 2º curso de BUP.</i> Teide: Barcelona, 1976.</li> <li>- Etayo, J., Colera, J. y Ruíz, A. <i>Matemáticas 2º de BUP</i> Anaya: Salamanca, 1977.</li> <li>- Anzola, M., Caruncho, J. y Gutiérrez, M. <i>Matemáticas 2º de Bachillerato.</i> Santillana: Madrid, 1976.</li> <li>- Lazcano, I. y Barolo, P. <i>Matemáticas 2º BUP</i> Edelvives: Madrid, 1993.</li> <li>- Álvarez, F., García, C., Garrido, L. M. y Vila, A. <i>Matemáticas. Factor 2.</i> Vicens Vives: Barcelona, 1992.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Grupo Cero. <i>Matemáticas de bachillerato. Volumen 2.</i> Teide: Barcelona, 1985.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Hernández, F., Lorenzo, F., Martínez, A. y Valés, J. <i>Signo II. Matemáticas 2º Bachillerato.</i> Bruño, 1989.</li> <li>- Colera, J. y Guzmán, M. <i>Bachillerato. Matemáticas 2.</i> Anaya: Madrid, 1994.</li> <li>- Guzmán, M. y Colera, J. <i>Matemáticas I COU.</i> Anaya: Madrid, 1989.</li> </ul>

4. *Periodo comprendido entre 1995 y 2000.* Abarca desde la publicación en 1995 de los decretos curriculares derivados de la LOGSE hasta la fecha de desarrollo de nuestra investigación. Durante estos años observamos distintos fenómenos en la producción de libros de texto. Por un lado, algunas editoriales clásicas en general han «maquillado» los libros del periodo anterior, adaptándolos al nuevo bachillerato; por otro, editoriales dedicadas a la enseñanza básica también publican en ESO y Bachillerato; y editoriales tradicionalmente dedicadas a la enseñanza universitaria están elaborando libros para el bachillerato. Los libros que seleccionamos, por coherencia con el resto de los periodos, corresponden al primer tipo de editoriales.

- 
- Grupo Azul 21. *Matemáticas 2 Ciencias de la Naturaleza y de la Salud*. Santillana: Madrid, 1997.
  - Colera, J., Oliveira, M. J. Fernández, S, y Guzmán, M. *Matemáticas I (Bachillerato LOGSE)*. Anaya: Madrid, 1996.
  - Colera, J., Oliveira, M. J. y Fernández, S. *Matemáticas 2 (Bachillerato LOGSE)*. Madrid: Anaya, 1997.
  - Vizmanos, J. R, y Anzola, M. *Matemáticas I*. SM: Madrid, 1997.
- 

El control de la crítica externa se llevó a cabo mediante la verificación de la autenticidad (ediciones, originales) de los documentos y, procediendo a confirmar la fecha de la edición. Para la crítica interna, se elaboraron una serie de parrillas que permitieron relacionar las intenciones del autor, su ubicación en una determinada época y la identificación de los contenidos relacionados con el concepto a estudiar.

#### 4. ANÁLISIS DE LA DOCUMENTACIÓN

El análisis de la documentación nos permite estudiar el material teniendo en cuenta tanto criterios pedagógicos como históricos. Dada la cantidad de material de que se suele disponer, en esta etapa se debe diseñar algún instrumento que permita abordar el objetivo que se haya planteado.

##### Episodio 3. *Una clasificación de libros de texto*

En nuestro caso, en una investigación reciente cuyo objetivo era: «describir los libros de texto en función de los sistemas simbólicos de representación utilizados» (González, 2002) se realizó, en primer lugar, un vaciado de diferentes investigaciones relacionadas con el análisis de libros de texto a la búsqueda del instrumento idóneo para realizar la investigación. Esta búsqueda se llevó a cabo en dos frentes, por un lado se analizaron las investigaciones de los historiadores de la educación en relación con el análisis de libros de texto, con esto hemos constatado que si bien los historiadores de la educación han realizado aportaciones como tesis doctorales, exposiciones, coloquios, etc. relacionados con los libros de texto, son escasos los trabajos referidos a las matemáticas. Esto ya fue detectado en Francia, mediante el trabajo de Choppin (1993) en el que hace un balance bibliométrico de la investigación francesa sobre la historia de los manuales escolares. Las razones de dicha escasez se deben, a juicio de Choppin, tanto a la falta de formación matemática de los historiadores, como al escaso interés de los matemáticos por este tema. Por otro lado, estudiamos las aportaciones dentro del campo de la educación matemática en el que han destacado en los últimos años, el estudio comparativo que ha realizado Howson (1995) con libros de texto de diferentes países; los trabajos de Chevallard (1985), Chevallard y Joshua (1982) y Tavignot (1993) en relación con la transposición didáctica; la investigación de Pimm (1987, 1994) sobre la legibilidad de los

textos matemáticos; el estudio de Otte (1986) sobre las interpretaciones de los textos; la clasificación de Dormolen (1986) de los elementos imprescindibles que debe tener un libro de texto y las consideraciones de Lowe y Pimm (1996) acerca de las interacciones entre el lector, el escritor, el profesor y el libro en el aula de matemáticas.

Partiendo de los resultados establecidos en estas investigaciones, así como de las corrientes predominantes actualmente en la investigación en educación matemática, hemos realizado un estudio de libros de texto partiendo de la base de que la adquisición del conocimiento matemático es un acto de tipo social, en el que influyen tanto la época como la sociedad en la que está inmersa esta enseñanza, por lo que un apartado importante será el que se refieren a la contextualización de la obra analizada.

El análisis de los libros de texto se realizó en tres etapas con diferentes niveles de profundización:

- En primer lugar, se rellenó una ficha de referencia de cada una de las obras objeto de análisis, en la que se incluye: autor, año de nacimiento y fallecimiento, título de la obra, año de la primera edición indicando editorial, año de la edición consultada incluyendo editorial y lugar de edición, y localización del manual consultado.
- Seguidamente se analizó la obra desde un punto de vista general, relacionándola con el contexto en el que se ha generado dicho libro de texto. Este apartado nos dio información general acerca del texto, contextualizándolo para poder analizarlo correctamente en función de las circunstancias que rodearon su publicación. En él se reflejaron las circunstancias que hicieron que fuera escrito del modo en que ha llegado a nosotros, los objetivos que pretendía el autor, las innovaciones que se introdujeron, así como la estructura que posee el libro, es decir, su extensión, la secuenciación de los contenidos, las características de impresión o de presentación.
- Finalmente, se realizó un estudio de los diferentes sistemas de representación simbólicos en Análisis Matemático para lo que se utilizó la clasificación realizada por Janvier (1987) de dichos sistemas. De cada uno de los textos se han seleccionado sucesivas unidades de información, que se han clasificado, según los distintos tipos de sistemas de representación simbólicos, distinguiendo entre descripciones (d), tablas o diagramas (t), gráficas (g) y expresiones simbólicas (e). Además para cada uno de ellos se han considerado distintos apartados que reflejan la estructura, significado y utilidad que les dan los libros de texto.

Este último apartado nos permitió diseñar un instrumento de análisis de libros de texto encaminado a establecer su perfil identificador a partir de 20 **dimensiones** diferentes agrupadas en cuatro **categorías**: sintáctica, semántica, pragmático-didáctica y socio-cultural. Cada una de estas dimensiones se describió según tres modalidades distintas por lo que pudimos clasificar los libros de texto en tres tipos:

- *Expositivo*: Libros en los que se considera el conocimiento matemático como una acumulación de enunciados, reglas y procedimientos aislados y relativamente inconexos y desconectados de la realidad, en los que el énfasis está puesto en la estructura matemáticas del contenido.
- *Tecnológico*: Se conciben las matemáticas como un conjunto de enunciados, reglas y procedimientos que se emplean como técnicas o destrezas para pensar sobre y aplicar los conceptos a diversas situaciones.
- *Comprensivo*: Se concibe que el aprendizaje de las matemáticas se adquiere mediante el establecimiento de una red de relaciones con otros contenidos considerando fundamental la experimentación.

En la siguiente tabla se muestran de manera sintética las categorías y las dimensiones utilizadas. La lectura horizontal permite comparar las diferentes tendencias de los libros de texto; la lectura vertical permite identificar las dimensiones que se han tenido en cuenta, lo que da una visión global del tipo de análisis realizado:

CATEGORÍAS	DIMENSIONES	EXPOSITIVO	TECNOLÓGICO	COMPRESIVO
SINTAXIS	1 Estructura del problema	Clásica	Aplicación	Explicación
	2 Descripciones teóricas	Formales	Formales-intuitivas	Intuitivas
	3 Símbolos utilizados en las tablas	Sin tablas	Con símbolos matemáticos	Con iconos
	4 Símbolos utilizados en las gráficas	Literal	Utilización de números	Elementos explicativos
	5 Tipos de expresiones simbólicas	Familias	Específicas	Variadas
	6 Fenomenología	Matemáticas	Realistas	Reales
SEMÁNTICA	7 Tipos de descripciones	De conceptos	De reglas	De relaciones
	8 Tipos de tablas	Sin tablas	Descripción local	Cuadros de variación
	9 Tipos de gráficas	Ideogramas	Ábacos	Mensajes topológicos
	10 Significado de las expresiones simbólicas	Objeto	Regla	Proceso
PRAGMÁTICO DIDÁCTICA	11 Función de los ejercicios	Rutinarios	Aplicación	Deducción
	12 Papel de las definiciones	Estructurales-teóricas	Aplicación a problemas	Interpretación
	13 Actividades relacionadas con las tablas	Sin tablas	Construcción	Interpretac./Construcción
	14 Actividades gráficas	Visualización	Construcción	Interpretac./Construcción
	15 Papel de las expresiones simbólicas	Ejemplificación	Escolar	Social
SOCIO CULTURAL	16 Influencia social y adaptación al currículum	No hay	Contexto intemporal	Contexto actual
	17 Influencias didácticas	Clásica	Adaptada al vitae	Novedosa
	18 Aplicación de las tablas	Sin tablas	Elemento auxiliar	Categoría de objeto
	19 Presentación de las gráficas (estática/dinámica)	Descontextualizadas	Impresa	Nuevas tecnologías
	20 Complejidad de las expresiones simbólicas	Clásicas	Sencillas	Complejas

El perfil de cada libro se obtuvo rellenando una tabla en la que para cada dimensión se indica en la casilla correspondiente la orientación (expositiva, tecnológica o comprensiva) que posee el libro analizado. Para una misma dimensión puede haber varios asteriscos, en el caso de que haya unidades de información que correspondan a varios perfiles. El libro queda clasificado por la columna en la que aparezcan mayor número de asteriscos.

## 5. HERMENEÚTICA

Una colección de datos, aunque estén muy bien clasificados, no es más que eso: una base de datos. El historiador debe dar una interpretación histórico-pedagógica. La *hermeneútica* es la interpretación de los datos a la luz de los análisis realizados. En esta fase se trata de dar una respuesta adecuada a las preguntas plantadas e indicar las posibles causas por las que se produjeron los hechos históricos analizados.

### Episodio 4. *Etapas en la construcción del concepto de punto crítico*

Tratando de responder a la pregunta ¿qué tipos de sistemas simbólicos utilizaban los matemáticos de los siglos XVII, XVIII y XIX en relación con los puntos críticos y de qué forma? seleccionamos fuentes primarias como:

- L'Hôpital, G.F.A. (1696) *Analyse des infiniment petits*. París: L'Imprimerie Royale.
- MacLaurin, C. (1742) *Traité des fluxions*. París: Quai de Augustines.
- Euler, L. (1755) *Institutiones calculi differentialis*. San Petersburgo: Academia Imperialis Scientiarum.
- Bézout, E. (1764) *Cours de Mathematiques*. París: De l'Imprimerie de Ph- D. Pierres.
- Bails, B. (1797) *Principios de matemáticas*. Madrid: Imprenta de la viuda de Joaquín Ibarra
- Lagrange, J. L. (1797) *Theorie des fonctions analytiques*. París: L'Imprimerie de la Republique.
- Lacroix, S. (1837) *Traité elementaire de calcul différentiel et calcul intégral*. París: Gautier-Villars.

La hermeneútica consistió en una explicación genética, en el sentido de señalar los sucesivos estadios de desarrollo en la utilización de los diferentes sistemas simbólicos en la enseñanza de los puntos críticos, intentando responder a la pregunta de cómo ocurrió dicha evolución mediante la enumeración de la secuencia genética de los diferentes sucesos. También hemos intentado indicar las causas que han influido en dicha evolución para dar respuesta a la pregunta por qué se produjo. Es decir, se aporta una síntesis histórica de tipo genético, en el sentido de que se

establecen las secuencias cronológica y causal acerca de la enseñanza de los puntos críticos.

Se han contemplado tres apartados para resumir y explicar todos los aspectos analizados en cada uno de los libros:

- *Análisis socio-cultural* con el que se pretende dar una explicación que justifique los contenidos y su presentación en el libro en relación con la época, el lugar y los alumnos para los que fue escrito.
- *Análisis epistemológico* con el que se pretende analizar el status matemático que poseen los contenidos del Análisis Matemático en cada uno de los libros, concretamente en relación con los puntos críticos.
- *Análisis didáctico* se trata de ver el enfoque que reciben los puntos críticos en cuanto a la enseñanza-aprendizaje.

Estos tres tipos de análisis nos muestran la evolución de la enseñanza del Análisis Matemático en los ciento cincuenta años que van desde su inicio hasta su consolidación, distinguiéndose tres periodos.

### *Análisis socio-cultural*

Hay un primer periodo al que pertenecen los libros de l'Hôpital y MacLaurin caracterizados, desde el punto de vista de su estructura, por mantener la concepción clásica heredando la forma de hacer de los matemáticos griegos. A partir de unas definiciones iniciales en las que se establece el significado de los conceptos «primarios» que van a aparecer a lo largo del texto, se van a suceder las diferentes proposiciones que caracterizan las propiedades, estructura, reglas de cálculo en los que están involucrados dichos conceptos. Con cada una de dichas proposiciones se incluye un problema o ejercicio resuelto con la pretensión de ejemplificarla.

Un segundo periodo, corresponde a los libros de Euler y Lagrange que son más modernos en la organización de los contenidos, condicionada por la estructura algebraica de que se quiere dotar a los conceptos con el objetivo de que sea más coherente y consistente. Así se configura una moderna concepción del libro de texto matemático, que comienza con los fundamentos de la materia y culmina tras una exposición sistemática con las líneas más recientes de investigación.

Por todo ello el tipo de representación dominante es la representación simbólica: la ecuación algebraica o trascendente de la función que se quiere estudiar. Los problemas que se estudian tienen un carácter exclusivamente algebraico lo que supone una descontextualización de las funciones, ya que no se hace referencia ni a situaciones o formas de conocimiento que den lugar a ellas, ni siquiera a una descripción geométrica que permita su visualización.

Por último, están los libros de Bézout, Bails y Lacroix en los que se inicia un tratamiento de tipo didáctico característico de las primeras enciclopedias.

*Análisis epistemológico*

Inicialmente se posee una concepción geométrico-dinámica del Cálculo diferencial que se puede observar en el libro de L'Hôpital, pero sobre todo en el de MacLaurin. Las proposiciones y las demostraciones se llevan a cabo en un lenguaje puramente geométrico, y se realizan consideraciones acerca del cambio que se experimenta en el recorrido de las curvas.

En estos libros se expone una concepción geométrico-dinámica del Cálculo Diferencial, de forma que tanto las proposiciones como las demostraciones se llevan a cabo en un lenguaje puramente geométrico y las observaciones se realizan sobre el cambio experimentado en el recorrido de las curvas:

«Soit une ligne courbe MDM dont les appliquées PM, ED, PM soient parallèles entr'elles, & qui soit telle que la coupée AP croissent continuellement, l'appliquée PM croisse aussi jusqu'à un certain point E, après lequel elle diminue; ou au contraire qu'elle diminue jusqu'à un certain point E, après lequel elle croisse. Cela posé, La ligne ED sera nommée La plus grande, ou la moindre appliquée» (L'Hôpital, p. 41).

En un segundo periodo, se ensalzan los aspectos de tipo algebraico, con lo que el objetivo está puesto en dotar de una estructura coherente y consistente a los conceptos, tal es el caso de los libros de Euler y Lagrange.

Uno de los cambios más importantes que se introdujo en el Análisis Matemático fue relativo a la noción de función. Hasta entonces había sido concebida como una relación entre dos variables, mientras que a partir de Euler empieza a pensarse como una asociación que a un número  $x$  le asocia otro  $f(x)$ . Este cambio va a afectar al concepto de diferencial utilizado hasta entonces, ya que pasó de ser considerado como la variación de una variable, a la razón de cambio de la función en relación con el incremento de la variable.

Se realiza una revisión de la noción de diferencias finitas y la aplicación a las series para pasar a las diferencias infinitas, y las de cualquier orden. Se diferencia todo tipo de funciones desde las algebraicas a las trascendentes y las que tienen varias variables, estableciéndose las reglas y fórmulas para calcularlas. Es decir, se trata de establecer una teoría de tipo general deduciendo las fórmulas necesarias para poder diferenciar cualquier tipo de función según la expresión simbólica que tenga. En este sentido, las fórmulas pueden sustituir al concepto de diferencial, independientemente de que se comprenda o se adquiera este concepto, la simple aplicación de una fórmula nos permite resolver los problemas que se nos planteen, con lo que el Análisis Matemático se irá convirtiendo en algo puramente mecánico más que conceptual. Hay que destacar la utilización del cociente diferencial frente al diferencial que se había utilizado en el libro de L'Hôpital. Por ejemplo en el caso de los máximos y mínimos, se indica:

«Interim tamen ad casus, quibus valor ipsius y vel maximus vel minimus evadat, investigandos haec prima operatio instituenda es, ut differentiale functionis propositae nihilo aequetur atque ex aequatione  $dy/dx = 0$  omnes ipsius  $x$  valores elicantur... Ostendemus enim fieri posse, ut neque maximum neque minum locum habeat sit  $dy/dx$ » (Euler, p. 448).

Asimismo, hay que destacar el desarrollo en serie de potencias de las funciones que sugiere una dependencia de las expresiones analíticas y su estudio, con lo que se pierde el origen geométrico del Análisis, pasándose a ocupar más del estudio de las fórmulas.

Finalmente los libros de Bézout, Bails y Lacroix fijan su centro de interés en los métodos de cálculo de los puntos críticos, utilizando para ello el cociente diferencial aunque como cociente algebraico. Muchos de los conceptos relacionados con el cálculo diferencial que se incluían en estos libros de texto han desaparecido de la enseñanza, tal es el caso de las evolutas y envolvente, los círculos osculadores, los puntos de retroceso...

### *Análisis didáctico*

En el primer periodo, dado que no existe todavía un lenguaje funcional propio, ni siquiera la noción de función, todo el discurso descansa sobre el estudio y análisis de curvas de forma que las representaciones más utilizadas son las gráficas en las que las curvas mantienen su significado geométrico, de hecho, las curvas estudiadas son las clásicas como el *Folium de Descartes* o la *parábola semicúbica de Neile*. Los problemas que se tratan son exclusivamente geométricos y su estudio se hace desde este punto de vista, así los puntos críticos se clasifican atendiendo a este carácter, siendo el criterio la posición de la tangente: se distinguen puntos críticos que poseen tangente horizontal o vertical. Los términos utilizados para identificar los puntos de las curvas son diferentes de los actuales: *coupée* y *apliquée*.

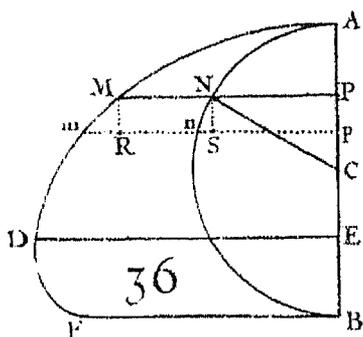
En el libro de L'Hôpital se estudian de forma separada las curvas construidas a partir de un eje, de aquéllas cuyo elemento básico para su construcción es un único punto, desarrollándose de forma separada el método que permite calcular los puntos críticos en un caso o en otro, aunque en ambos se realiza a partir de lo que llama diferencia:

«La portion infiniment petite dont une quantité variable augmente ou diminue continuellement, en est appellée la Différence» (L'Hôpital, p. 2).

En el libro de MacLaurin se hace el desarrollo en términos de las fluxiones de Newton

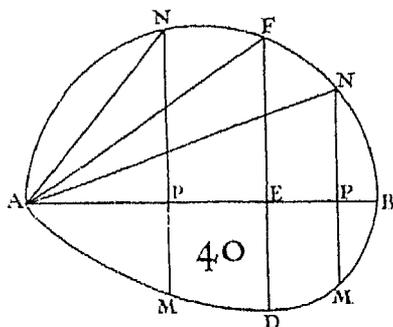
«On trouve les plus grandes & les plus petites ordonnées, dans de pareils cas, (qui sont les plus communs dans la résolution des Problèmes) en examinant quel terme la Fluxion de la courbe devient égale à celle de la base, ou en quelque terme la Fluxion de l'ordonnée s'évanouit, celle de la base étant donnée» (MacLaurin, p. 156).

Sorprende la visión geométrica que poseen de las ecuaciones algebraicas o de las descripciones para poder realizar la construcción de curvas, bien a partir de otras



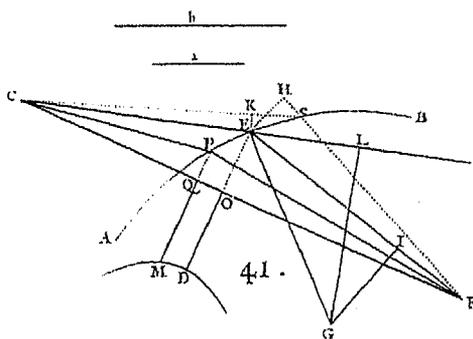
Soit une demiroulette acourcie AMF, dont la base BF est moindre que la demi-circonférence ANB du cercle générateur qui a pour centre le pint C. Il faut déterminer le point E sur le diamètre AB, en sorte que l'apliquée ED soit la plus grande qu'il es possible. (L'Hôpital, p. 43)

a partir de los datos de un problema



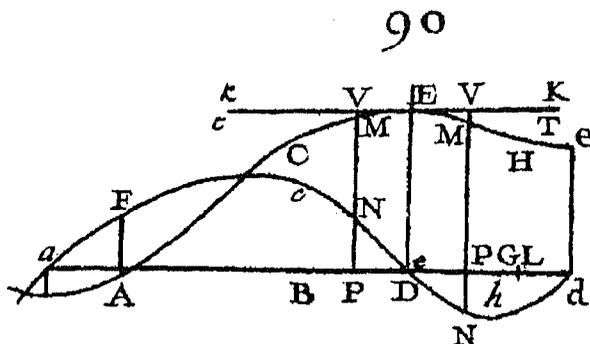
EXAMPLE VI. Entre tous les Cones qui peuvent éter inscrits dans une sphère, déterminer celui qui a la plus grande surface convexe. (L'Hôpitale, p. 46)

o a partir de un dibujo.



Esta visión les conducirá en algún caso a cometer errores que con otras herramientas no se habrían producido.

Hay que destacar las gráficas, tan en moda hoy en día, de MacLaurin en las que aparece al mismo tiempo, una curva y su curva derivada, lo que permite hacer comparaciones entre ambas, asociando las características gráficas de cada una de ellas, y la visualización de los diferentes tipos de puntos.



Las expresiones simbólicas que se utilizan en todos los textos representan toda una familia de funciones y se realiza un estudio de los puntos críticos en relación con los parámetros de dichas expresiones. Los tipos de funciones son muy variadas, y por ejemplo, en el de MacLaurin se manejan indistintamente las variables  $x$  e  $y$ , haciéndose un estudio simétrico respecto de cada una de ellas.

En un segundo periodo, en los libros de Lagrange y Euler el tipo de representación predominante es la representación simbólica: la ecuación algebraica o trascendente de la función que se quiere estudiar.

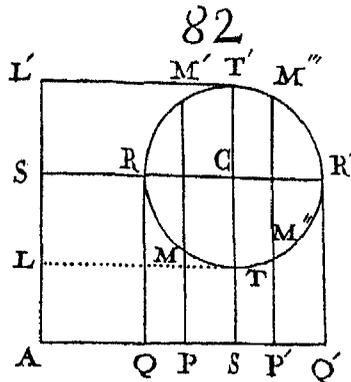
Destaca el análisis detallado que hace Euler de las operaciones algebraicas de funciones y de su derivación, clasificando dichas funciones según su expresión simbólica y estudiando la diferenciación de cada uno de estos tipos de forma pormenorizada e independiente, estableciendo todas las posibilidades en relación con los parámetros que posean dichas expresiones simbólicas.

En el caso de Lagrange hay que mencionar su utilización de los desarrollos en serie de potencias sin necesidad de recurrir a las fluxiones, a las cantidades evanescentes o las diferenciales como habían hecho los matemáticos anteriores. A partir de la noción de función, realiza su desarrollo en serie, analiza la formación de los términos de dicha serie y establece la noción de función derivada. Las expresiones simbólicas utilizadas, hacen alusión a un contexto dinámico en el que las variables son consideradas como representaciones de un movimiento en los que a partir de una situación actual, se predice la posición futura. Tal es la función que cumplen los desarrollos en series de potencias. Esto determina que el Cálculo Diferencial se establezca a partir de la noción de función derivada y no en la noción de diferencial, como hemos visto en los otros libros escritos en Francia.

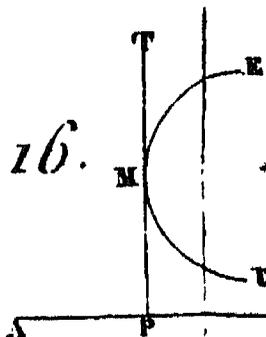
Finalmente, en el tercer periodo, en los libros de Bézout, Bails y Lacroix se utilizan los dos tipos de representación anteriores, intentando encontrar un equilibrio entre la mayor precisión de la representación algebraica con la visualización de las propiedades gráficas de la curva correspondiente.

Los problemas que se estudian son tanto aritméticos como geométricos y están planteados desde un punto de vista más didáctico que de la propia estructura de la matemática. Todos los problemas son genéricos en el sentido de que la solución corresponde a una función de curvas, y muchos de ellos son de tipo demostración.

En estos libros se consideran indistintamente la variable  $x$  e  $y$  y al igual que hacía MacLaurin, así Bézout calcula los puntos críticos de una circunferencia:



Y Lacroix representa gráficamente un mínimo con tangente vertical de la siguiente forma:



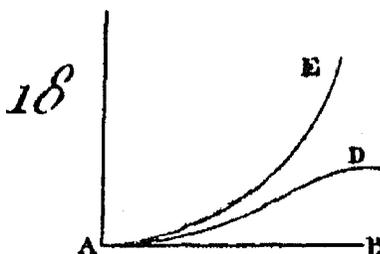
Se utilizan indistintamente representaciones gráficas y algebraicas buscando un equilibrio entre la mayor precisión de la segunda con la visualización de las propiedades de la gráfica de la curva correspondiente que proporciona la primera. La definición de puntos críticos es de tipo gráfico, asociando dichos puntos con un determinado comportamiento de la curva.

«La valeur qui a lieu dans le passage de l'accroissement au décroissement, étant plus grande que celles qui la précèdent et qui la suivent immédiatement, s'appelle un maximum; le minimum es celle qui répond au point où le décroissement se change en accroissement; celle-ci est par conséquent plus petite que les valeurs qui la précèdent et qui la suivent immédiatement: je dis immédiatement, parce qu'il y a des fonctions pour lesquelles ces alternatives ont lieu plusieurs fois» (Lacroix, p. 96).

A partir de esta definición, se clasifican los distintos puntos de una forma gráfica: si tienen tangente horizontal o vertical, si cambian la convexidad de la curva, si dividen la curva en dos ramas... Pero también se hace una clasificación de tipo algebraico. A partir de la ecuación de una curva se van analizando las diferentes posibilidades según la variación de los parámetros de la curva. Se trata, por lo tanto, de un estudio de tipo gráfico-analítico en el que el objetivo es la clasificación de los puntos críticos. Entre los distintos tipos de puntos se indica qué se entiende por punto singular:

«On appelle points singuliers d'une courbe ceux dans lesquels elle offre quelque circonstance remarquable» (Lacroix, p. 96).

Y además de los máximos, mínimos y puntos de inflexión, se consideran puntos de retroceso de segunda especie en los cuales se forman dos ramas de la curva que tienen la misma tangente en dicho punto, de forma que ambas ramas permanecen en el mismo semiplano respecto de dicha recta tangente en un entorno del punto de retroceso.



Los puntos múltiples:

«Quelquefois les branches des courbes, au lieu de se réunir en se touchant, se coupent, et ont chacune leur tangente particulière.» (Lacroix, p. 101)

Y por último, los puntos conjugados:

«Les courbes sont accompagnées quelquefois de points isolés qui ont le caractère des points multiples; mais on les distingue, parce que les coefficients différentiels, y devenant imaginaires, soit dès le premier ordre, soit plus tard, montrent qu'il n'y a pas de points consécutifs.» (Lacroix, p. 103)

Todo ello configura, en este tercer periodo una generación de libros dedicados a la formación de profesionales que deben utilizar las matemáticas, caracterizados por su sentido didáctico.

## CONCLUSIONES

Las investigaciones presentadas pueden dar una idea de la diversidad de situaciones de investigación en que se puede aplicar y ser útil el método de investigación histórico, sin que ni mucho menos se agoten todas las posibilidades.

Por un lado nos pueden servir para identificar algunos comportamientos, concepciones, ideas que tienen los alumnos y que no son ajenos a la propia matemática. Un buen conocimiento de la matemática y de su devenir histórico puede ser fundamental tanto para el investigador como para el profesor, lo que justificaría y sería aconsejable para su introducción en el currículo de formación de profesores.

El análisis de las fuentes primarias y de los textos históricos nos sumergen en el mundo del matemático que vivió en una determinada época, nos da cuenta de las concepciones y la forma de pensamiento imperante en el momento, nos indica el tipo de problemas y las formas de solución que se gestaron según los instrumentos de los que se disponía, se recuperan algunas ramas de la matemática como, según hemos visto, la visión puramente geométrica de los conceptos propios del Análisis e incluso pueden ser fuente de actividades, situaciones o problemas para plantear a los alumnos y diseñar secuencias de aprendizaje, que proporcionen una formación matemática más global y comprensiva que la que se ha practicado en los últimos años.

Por otro lado, el estudio de libros de texto y su evolución a lo largo de la historia, tanto en relación con un determinado concepto como en la estructuración de contenidos, es interesante puesto que nos proporciona información sobre actividades o situaciones que pueden ser perfectamente recuperables en la actualidad, sobre el perfil de un libro que nos ayudará en la elección del manual adecuado según la formación que creamos conveniente para nuestros alumnos, sobre las ventajas e inconvenientes de una determinada metodología u orientación didáctica que en un determinado momento histórico estuvo de «moda», para establecer en qué medida se ajustan a las directrices oficiales marcadas por el Ministerio correspondiente, para determinar el grado de utilización del libro de texto en el aula de matemáticas.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Boyer, C. (1986). *Historia de las Matemáticas*. Madrid: Alianza Editorial  
 Bourbaki, N. (1972). *Notas de historia de la matemática*. Madrid: Alianza Editorial  
 Cobos, J. (1995). *Fondo de libros de matemáticas existentes en Extremadura desde el siglo XVI hasta el XX (1930)*. Cáceres: Universidad de Extremadura.  
 Cohen, L. y Manion, L. (1990). *Métodos de investigación educativa*. Madrid: La Muralla.

- Cornu (1983). *Apprentissage de la notion de limit. Conceptions et obstacles*. Université de Grenoble (Tesis doctoral).
- Cuesta, N. (1985). *Historia de la invención del Análisis Infinitesimal y de su introducción en España*. Salamanca: Ediciones Universidad de Salamanca.
- Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Chevallard, Y. y Joshua, M. A. (1982). Un exemple de'analyse de transposition didactique: la notion de distance. *Recherche en Didactique des mathématiques*. 3(1), 159-239.
- Choppin, A. (1993). L'histoire des manuels scolaires. Un bilan bibliométrique de la recherche française. *Histoire de l'Education*, 58. 165-185.
- Dhombres y otros (1987). *Mathématiques au fil des âges*. París: Gauthier-Vilars.
- Díaz de la Guardia, E. (1988). *Evolución y desarrollo de la enseñanza media en España de 1875 a 1930. Un conflicto cognitivo-pedagógico*. Madrid: Centro de Publicaciones C.I.D.E.
- Dormolen, J. Van (1986). Textual Análisis, En B. Christiansen, A.G. Howson, M. Otte (eds.). *Perspectives on Mathematics Education*. 141-171. Dordrecht: Reidel
- Dugac, P. (1981). Des fonctions comme expressions analytiques aux fonctions representables analytiquement. En J. W. Dauben (ed.) *Mathematical perspectives*. New York: Academic Press.
- El Bouazzoui, H. (1988). *Conceptions des élèves et des professeurs a propos de la notion de continuité d'une fonction*. Teses du grade de PhD. Université Laval.
- Fox, D. (1981). *El proceso de investigación en educación*. Pamplona: Universidad de Navarra.
- Gall, M.; Borg, W.; Gall, J. (1996). *Educational Research: an introduction*. New York: Longman
- García, V. (1980). *La educación en la España del siglo XX*. Madrid: Ediciones Rialp.
- González, M. T. (2002). *Sistemas simbólicos de representación en la enseñanza del Análisis Matemático: Perspectiva histórica acerca de los puntos críticos*. Tesis doctoral inédita. Salamanca: Universidad de Salamanca
- Grattan-Guinness, Y. (1984). *Del cálculo a la teoría de conjuntos*. Madrid: Alianza Editorial
- Hormigón, M. (1991). *Las matemáticas en el siglo XIX*, Colección historia de la Ciencia y de la Técnica. Madrid: Akal.
- Howson, G. (1995). *Mathematics Textbooks: A comparative Study of grade 8 Texts*. Vancouver: Pacific Educational Press.
- Janvier, C. (1987). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. Londres: Lawrence Erlbaum Associated Publishers.
- Lowe, E. y Pimm, D. (1996). This is so: a text on texts. En A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y C. Laborde. *International Handbook of Mathematics Education*, 371-410. Dordrecht: Kluwer.
- Otte, M. (1986). What is a text? En B. Christiansen, A. G. Howson, M. Otte, (eds.). *Perspectives on mathematics education*. Dordrecht: Reidel Publishing Company, 173-203.
- Pimm, D. (1987). *Speaking mathematically*. New York Routledge y Kegan Paul. Traducción cast. (1990). *El lenguaje matemático en el aula*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencias-Ediciones Morata.
- Pimm, D. (1994). Mathematics classroom language form, function and force. En R. Bieler, R. W. Scholtz, R. Straßer y B. Winkelmann (eds.). *Didactic of mathematics as a scientific discipline*, 159-169. Dordrecht: Kluwer.
- Rey Pastor, J y Babini, J. (1981). *Historia de la Matemática*. Barcelona: Gedisa

- Rico, L. y Sierra, M. (1994). Educación matemática en la España del Siglo XX. En J. Kilpatrick, L. Rico y M. Sierra *Educación Matemática e Investigación*. Madrid: Síntesis, 99-207.
- Schubring, G (1987). On the methodology of analyzing Historical Textbooks: Lacroix as textbook author. *For the learning of mathematics*, 7 (3), 41-51.
- Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics*. 18, 371-197.
- Sierpinska, A. (1995). Obstacles epistemologiques relatifs a la notion de limite. *Recherches en didactique des Mathematiques*, 6(1), 5-67.
- Sierra, M., González, M. T. y López, C. (1999). Evolución histórica del concepto de límite funcional en los libros de texto de Bachillerato y Curso de Orientación Universitaria: 1940-1995. *Enseñanza de las Ciencias*, 17 (3), 463-476.
- Sierra, M., González, M. T. y López, C. (2001). *Diseño, experimentación y evaluación de un Proyecto de enseñanza del análisis Matemático en el Bachillerato*. Universidad de Salamanca: Departamento de Didáctica de la Matemática y de las Ciencias Experimentales (Documento inédito).
- Sierra, M. González, M. T. y López, C. (2002). Una visión integradora acerca del concepto de límite. *UNO. Revista de Didáctica de la Matemática*. 77-94.
- Sierra, M., González, M. T. y López, C. (2003). El concepto de continuidad en los manuales españoles del siglo XX. *Educación Matemática*, 15 (1), 21-51.
- Tavignot, P. (1993). Analyse du processus de transposition didactique. Application a la symétrie orthogonale en sixieme lors la reforme de 1985. *Recherches en didactique des mathematiques*, 13 (3), 257-294.
- Utande, M. (1964). *Planes de estudio de enseñanza media*. Madrid: MEC.
- Vea, F. (1995). *Las matemáticas en la educación secundaria en España en el siglo XX*. Cuadernos de historia de la ciencia 9. Zaragoza: Universidad de Zaragoza.
- Viñao, A. (1997). De la importancia y utilidad de la historia de la educación (o la responsabilidad moral del historiador). En D. Gabriel; A. Viñao (eds.). *La investigación histórico-educativa*. Barcelona: Roncel.
- Youskchevitz, A. P. (1976). The concept of function up to middle of the 19<sup>th</sup> century. *Archive the history of exact science*, 36-85.