Relime Vol. 8, Núm. 1, marzo, 2005 pp.25-68

La noción de predicción: Análisis y propuesta didáctica para la educación universitaria

Josefina Marta Marcolini Bernardi*
F. Javier Perales Palacios**

RESUMEN

Este artículo discute el fundamento teórico de una propuesta didáctica. Parte de la consideración de que las dificultades en el proceso de aprendizaje de la matemática entre los estudiantes universitarios de las áreas de ciencias e ingeniería no sólo obedecen a causas de orden pedagógico o técnico al momento de transmitir conocimientos, sino fundamentalmente en la manera en que se selecciona, articula y organiza el saber matemático con fines didácticos. Se piensa como problema didáctico el concerniente a la determinación del *qué enseñar*, no del *cómo enseñar* (postura clásica positivista). Tal búsqueda ha permitido formular una conjetura plausible: es posible reconstruir el discurso didáctico de una parte del análisis matemático, tomando como idea central a la noción de predicción en sus vínculos con la serie de Taylor. En otro sentido, dicha hipótesis señala que es posible rediseñar el currículum y su discurso didáctico en torno a aquello que fue indispensable en la génesis del conocimiento. Por ellos, los autores centran su atención en la serie de Taylor, sus antecedentes, motivaciones, situaciones contextuales, evoluciones temporales, presentaciones en textos clásicos y posibilidades de uso –algunas aún inexploradas– en los textos actuales. El trabajo proveyó de la base teórica que sustentó una investigación doctoral en el campo de la didáctica de la física en España.

PALABRAS CLAVE: Socioepistemología, idea germinal, variacional, predicción.

The notion of prediction: Analysis and didactic offer for the university education

ABSTRACT

This paper discusses the theoretical basis of a didactic proposal. It begins from the consideration that the difficulties in the learning process of mathematics among university students of sciences and engineering areas, not only obey to causes of pedagogical or technical order, but fundamentally, in the way in which the mathematical knowledge is selected, articulated and organized with didactical aims. We considered then, that the determination of "what to teach" and not only "how to teach" - positivist classic posture is a didactic problem. This search has allowed us to formulate

---

Fecha de recepción: septiembre de 2004
*Departamento de Matemáticas, Área Matemática Aplicada, Universidad de Jaén, España.
**Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales, Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada, España.

a reasonable >conjecture: it is possible to reconstruct the didactic discourse of a part of the mathematical analysis taking as a central idea the prediction notion >and its links with the Taylor's serie. In another sense, this hypothesis indicates that it is possible to redesign the curriculum and its didactic discorse around of that, we considered, was indispensable for the genesis of the knowledge. We will consider to the Taylor's serie, its contextual antecedents, motivations, situations, temporary evolutions, presentations on classic texts and possibilities of use, some still unexplored in current texts. The article provided with the theoretical base that sustained a Doctoral research in the field of Physics Didactis in Spain.

KEYWORDS: Socioepistemology, germinal idea, variational, prediction.

A noção de prognóstico: Análise e proposta didática para a educação universitária

RESUMO

Neste artigo se discute a fundamentação teórica de uma proposta didática. Parte da consideração de que as dificuldades no processo de aprendizagem da matemática entre os estudantes universitários das áreas de ciências e engenharia, não só obedece a causas de ordem pedagógica ou técnicas, no momento de transmitir conhecimentos, mas fundamentalmente, na maneira em que se seleciona, articula e organiza o saber matemático com fins didáticos. Pensamos então, como problema didático, o que concerne a determinação do que é ensinar e não só de como ensinar – postura clássica positivista. Esta busca nos tem permitido formular uma conjectura plausível: é possível reconstruir o discurso didático de uma parte da análise matemática tomando como idéia central a noção de predição e seus vínculos com a série de Taylor. Em outro sentido, esta hipótese destaca que é possível reelaborar o currículo e seu discurso didático em torno daquilo que consideramos, o que resultou indispensável na gênese do conhecimento. Nos ocuparemos da série de Taylor, seus antecedentes, motivações, situações contextuais, evoluções temporais, apresentações nos textos clássicos e possibilidades de uso, algumas ainda inexploradas, nos textos atuais. O artigo vem da base teórica que sustentou uma pesquisa de
doutorado no campo da didática da física na Espanha.

PALAVRAS CHAVE: Socioepistemologia, idéia germinal, variacional, predição.

La notion de prédiction: Analyse et proposition didactique pour l' éducation universitaire

RÉSUMÉ

Dans cet article on discute les fondements théoriques d' une proposition didactique. On part de la considération suivante : les difficultés dans le procès d'

apprentissage en mathématiques entre les étudiants universitaires dans les domaines des sciences et du génie, ne sont pas seulement de l'ordre pédagogique ou technique au moment de transmission des connaissances, mais fondamentalement, dans la façon où le savoir mathématique est sélectionné, articulé et organisé au propos didactique.
On considère alors, comme problème didactique, celui de la sélection des matériaux d' enseignement et pas seulement la façon dont ont enseigne –posture classique positiviste. Cette recherche nous a permis de formuler une conjecture plausible : il est possible de reconstruire le discours d' une partie de l' analyse mathématique en prenant comme idée central la notion de prédiction dans les liens associés avec la série de Taylor.
En autre sens, cette hypothèse indique qu' il est possible de redessiner le curriculum et son discours didactique autours du quel nous avons considéré indispensable la genèse des connaissances. On s' occupera de la série de Taylor, ses antécédants, motivations, situations contextuelles, évolutions temporaires, présentations en textes classiques et ses possibilités d' utilisation, certaines d' elles encore inexplorées. Cet article a prévu dans la base théorique soutenue une recherche doctorale réalisée dans le domaine de la didactique de la physique en Espagne.

MOTS CLÉS: Socioepistemologie, idée germinale, variationnel, prédiction.

1. INTRODUCCIÓN

Entre los aspectos que caracterizan a la enseñanza de la matemática y de los procesos de *matematización* de las ciencias, consideramos en particular la enseñanza y el aprendizaje del cálculo infinitesimal, dado que ocupa un lugar privilegiado en la educación superior. Los vínculos que guarda, tanto con la matemática elemental como con la avanzada, así como el papel que desempeña en el resto de las ciencias, lo convierten en un conjunto de saberes con valor teórico y empírico considerables, el cual es indispensable en dicho nivel educativo.

Tradicionalmente, la enseñanza de las ciencias básicas en los primeros cursos de instrucción universitaria asigna un papel formativo puramente teórico a asignaturas como matemáticas y física en titulaciones como Ingenierías Técnicas, licenciaturas en Ciencias Experimentales u otros estudios científico-técnicos. Por ello, la metodología docente consiste en la explicación de un largo temario bajo la modalidad de clases magistrales, donde el estudiante suele ser considerado como un sujeto pasivo que asimila ideas de "forma natural" mediante el estudio de apuntes de clase y textos escolares.

Aunque los problemas de la educación en matemáticas son muchos y muy dispares, la enseñanza del cálculo ha sido reconocida como una de las fallas mayores en la educación superior (Artigue, 1998; Steen, 1987). Internacionalmente, las investigaciones hechas sobre la didáctica del cálculo han abarcado un amplio espectro. Si se lleva a cabo una revisión extensa de las fuentes, observamos que en su mayoría no consideran que el discurso matemático escolar[1] sea susceptible de modificaciones pertinentes, confiriéndole en consecuencia un cierto carácter de inmutabilidad a los conceptos y procesos matemáticos en cuestión (Cantoral, 2001; Farfán, 1997). Por otra parte, hay una creencia generalizada de que el aprendizaje último del cálculo debe poner énfasis en los aspectos tradicionalmente formales de la disciplina, marginando la intuición y los aspectos heurísticos que, en conjunto, generan la construcción del conocimiento (Tall y Vinner, 1981).

La enseñanza de las matemáticas en España, especialmente en el nivel universitario, se caracteriza por un *deductivismo exagerado,* un exceso de formalización y generalización, y una presentación centradas en ellas mismas, sin referencia a otras ciencias (Cantoral y Reséndiz, 2003; Cubillo y Ortega, 2002; Cantoral y Farfán, 1998; Núñez y Font, 1995). Sin embargo, gran parte de los descubrimientos en matemáticas han sido resultado del desarrollo de determinadas técnicas en contextos concretos que se relacionan con otras prácticas de referencia, como es el caso del cálculo infinitesimal, asociado con la mecánica en los trabajos de Newton. Por ello, la escasa presencia de uniones en el ámbito de la enseñanza de las matemáticas con otras disciplinas científicas y tecnológicas puede privarla de sus características básicas desde el punto de vista científico, haciendo más difícil su asimilación para los estudiantes (Sánchez, García y Sánchez-Pérez, 1999).

Otro problema en la comprensión de los conceptos y teorías científicas reside en la descontextualización. Gran parte de los investigadores en didáctica de las ciencias reconoce que es una de las dificultades en la enseñanza durante los primeros cursos de las universidades españolas (Núñez y Font, 1995; Gil et al., 1991; Sánchez, García y Sánchez-Pérez, 1999).

En esta investigación diferimos de algunas posturas, ya que partimos de la base de que aquello que actualmente se enseña a los alumnos en el aula no logra transmitirles ideas matemáticas para encarar los problemas que plantea el campo de las ciencias experimentales. Tal premisa nos ha llevado a realizar una propuesta diferente, apoyada en la recuperación de los significados inherentes al concepto y las intuiciones primarias del sujeto que le permitan acceder al concepto, aunque provengan de diversas fuentes de referencia. Un enfoque así es conocido actualmente como socioepistemológico (Cantoral y Farfán, 2004; Buendía y Cordero, 2005).

Queremos rescatar, en algún sentido, la idea básica que propusieron hace algunos años los integrantes del Grupo Zero (Azcárate, 1990), la cual afirmaba que la enseñanza de las matemáticas debería fundamentarse en la relación dialéctica existente entre las matemáticas como *instrumento de conocimiento* y como *objeto de conocimiento.* Azcárate señala que el carácter de los programas vigentes (exhaustivos, excesivamente formales y totalmente separados de la vida cotidiana y de los planes de otras materias), así como la propia estructura de los estudios, ha inducido una enseñanza de las matemáticas en la que se ha descuidado su papel como *instrumento de conocimiento*. De igual manera, una enseñanza de las matemáticas como “objeto de conocimiento” ha resultado también distorsionada por el carácter de estos mismos programas, pensados casi exclusivamente en función de las necesidades de los niveles de enseñanza superior, dejando poco espacio a la reflexión sobre las propias matemáticas, su contenido, métodos y evolución.

Estas reflexiones, hechas por expertos en la enseñanza para el nivel medio, tienen mucho en común con aquéllas a las que nosotros también hemos llegado por caminos diferentes, y son aplicables a nuestro contexto: la enseñanza en los primeros cursos universitarios dentro de las Facultades de Ciencias Experimentales y las Escuelas Politécnicas de España.

Asimismo, este trabajo propone un cambio en la *centración*. Así, en vez de estudiar cómo llevar al alumno hacia un discurso teórico inmóvil, caracterizado por su excesivo formalismo y rigor, expone una forma diferente de mostrar el saber enseñado, a partir de las intuiciones que dieron origen a los diversos conceptos del cálculo.

Para ello nos apoyamos en un estudio de Cantoral (1995) sobre el desarrollo de la serie de Taylor, donde parte del antecedente inmediato a dicha serie, el binomio de Newton con exponentes racionales, según la forma en que originalmente la concibió el mismo Newton (la importancia que tiene en este caso el teorema del binomio es como herramienta de conocimiento para construir la serie de Taylor). Luego, Cantoral presenta las contribuciones que, relacionadas con la serie de Taylor, hiciera L'Hôspital en su texto de cálculo. De tal contribución interesa la identificación gráfica de los diferenciales sucesivos de una variable continua, ya que con ella es posible concebir a la serie de Taylor en una variable como una expresión que se presenta en el problema de estimar el valor de una ordenada próxima a otra conocida. A continuación, se presentan los trabajos de Taylor y de MacLaurin en los que desarrollan la serie y las condiciones para la localización de máximos y mínimos. Estas razones permiten afirmar que así se tiene a la serie de Taylor para una variable construida mediante procedimientos ausentes en los textos actuales.

Por todo ello, haremos uso de elementos tales como la visualización, la predicción, el reconocimiento de patrones, el recurso de la analogía, la inducción, los diversos modos de validación y todo aquello que permitió, en algún momento de la elaboración del conocimiento, construir y transmitir información socialmente útil y que hoy puede estar omitida en la enseñanza. Es decir, queremos reconocer y usar aquellas *ideas germinales*[2] para poder explorar su función en el contexto actual.

Un recorrido por las ideas que han incidido en la historia de las ciencias muestra la estrecha relación entre las ciencias experimentales y las matemáticas, siendo notorio cómo aquéllas han servido de motor para el desarrollo de una parte de las matemáticas. Podemos afirmar que, a lo largo de la historia de la humanidad, el conocimiento de la naturaleza realizado por las ciencias experimentales y el desarrollo de su lenguaje, que es el de las matemáticas, ha contribuido enormemente al desarrollo tecnológico.

1.1. Problema didáctico

Estamos acostumbrados a considerar los fenómenos de cambio como hechos cotidianos. Los físicos, por ejemplo, usan ideas y procesos matemáticos para investigar el movimiento de los planetas, la desintegración de sustancias radioactivas, la velocidad de las reacciones químicas, las corrientes oceánicas o los patrones meteorológicos. Los ecólogos exploran los patrones de contaminación y los cambios en las poblaciones que implican complejas relaciones entre las especies. En áreas como la economía, la medicina o la política se usan modelos matemáticos en los que la clave del estudio recae en la noción de cambio. Así, el estudio del cambio nos conduce a la noción de variación, cuyo análisis se lleva a cabo por medio del cálculo diferencial e integral. Si se recurre a esta visión podremos replantear el estudio de algunos elementos del cálculo y contribuir a la reconstrucción del discurso matemático escolar.

Sin embargo, la enseñanza de las matemáticas en general y del cálculo en particular inhiben las ideas variacionales entre los alumnos. El sistema de enseñanza no promueve el estudio y análisis de la variabilidad de fenómenos sujetos al cambio, donde la *función* encontraría una especial significación estrechamente ligada a sus orígenes epistemológicos (Ruiz, 1994), ni tampoco favorece el desarrollo de un pensamiento y un lenguaje variacional (Cantoral y Reséndiz, 2003; Dolores et al., 2002).

Un análisis sobre manuales de cálculo arrojó que la serie de Taylor (ver anexo) se estudia más como un asunto de convergencia, ya se trate de residuo, de orden de magnitud o de error. Esto pone de relieve que la noción de *predicción*, que originalmente era descrita por la serie, ha sido desplazada de la enseñanza actual. Se opera una especie de *predación* de una idea, la *convergencia*, por sobre otra, la *predicción*, lo cual obedece a un fenómeno de transposición Didáctica (Cantoral, 2001)[3].

Esta consideración acerca de la idea de *predicción* y de la noción de convergencia, en su relación con la serie de Taylor, se presenta como una dificultad de naturaleza didáctica, lo cual se pone de manifiesto cuando se pretende trabajar una didáctica sustentada en los fenómenos –como sería deseable– para la formación que se imparte a estudiantes de las licenciaturas enmarcadas dentro de las ciencias experimentales y la ingeniería. Debemos tener en cuenta también que la noción de predicción resulta ser una de las características esenciales de las teorías físicas (Holton, 1979, pp.51-53).

Para centrar nuestra atención en el movimiento en la naturaleza debemos plantear estrategias que nos permitan describir su evolución, entendida como el pasaje sucesivo entre estados primarios y secundarios. Como ello precisa de la determinación de los aspectos que caracterizan a los estados y a los tránsitos sucesivos, también plantea la necesidad de establecer el conjunto de variables que en mutua dependencia se relacionan en el fenómeno. Además, hay que reconocer aquellos aspectos invariables asociados a los fenómenos de movimiento en la naturaleza, los cuales suelen descansar en la naturaleza misma del movimiento, en la forma en que se alteran las variables.

Este fue el mérito de las estrategias de estudio del movimiento, que se conocen bajo el nombre de *la constantificación*, ya que al analizar los cambios sucesivos de las variables asociadas al fenómeno son identificadas como constantes. Asimismo, permite buscar la relación de dependencia funcional ya no entre las variables en sí –lo cual es el objetivo del estudio–, sino también entre sus sucesivas variaciones instantáneas, pues sólo mediante esas ecuaciones habremos de recobrar la primera relación entre las variables. Si deseamos conocer la variación de $f(x)$, es decir, $f(x+h)$, el problema se centra en conocer el desarrollo en serie que tiene dicha expresión.

Ahora bien, en términos del modelo didáctico para la enseñanza de la física y de las matemáticas, esta investigación da a conocer la aproximación sugerida desde los trabajos de Newton, donde la serie es un recurso de simplificación y, al mismo tiempo, un método de descubrimiento aplicable al estudio de los fenómenos que fluyen continuamente con el transcurso del tiempo. De ahí que Newton reflexionara sobre la velocidad de cambio de las magnitudes estudiadas y llamara *mi método* a la asociación entre el manejo de las series infinitas (potencias) con el estudio de la velocidad de cambio, de las que a su vez se sirve para determinar la propia cantidad que fluye en el transcurso del tiempo. Del mismo modo, hallamos en el éxito del cálculo diferencial de L'Hôspital la idea de diferencial en que aumenta o disminuye la variable. Y así, buscando la relación entre los aumentos o disminuciones sucesivas de la variable, se aproxima a la expresión en serie que años más tarde Taylor utilizara de nuevo.

Centrándonos un poco en la presentación que Taylor hiciera de su serie, vemos expresada sutilmente la noción de la serie como instrumento de *predicción*. De este modo, si conocemos el estado inicial de la magnitud a estudiar, es decir, la ordenada y sus variaciones sucesivas, es posible predecir el comportamiento del estado vecino con la ayuda del método de los incrementos finitos (Cantoral, 1995). Esta forma de exposición, donde la expresión de la serie contiene intrínsecamente un significado propio de las ciencias físicas, es lo que la hace una construcción natural en una vasta diversidad de fenómenos. Como tal esquema se maneja en diversos contextos, es usual hallar argumentos del siguiente tipo: "si q representa un cierto parámetro físico en un instante dado de tiempo t, un instante después $t+dt$ este parámetro será $q+dq$". Sin embargo, está ausente en los tópicos transmitidos en la enseñanza escolar del cálculo.

Este acercamiento al estudio de la serie de Taylor se caracteriza por una idea principal: la *predicción*. A esta presentación la ubicaremos dentro de lo que llamaremos *paradigma newtoniano*, que se apoya en los fenómenos de naturaleza física de flujo.

La idea de *predicción* se refiere al estudio de la cuantificación de las *formas* variables en la naturaleza: partículas móviles, cuerpos terrestres y celestes y, naturalmente, los fenómenos de flujo continuo. En este ambiente, la pregunta planteada indaga en el comportamiento del estado vecino sobre la base de datos que aporta el estado de hecho (Cantoral, 1990, p. 200).

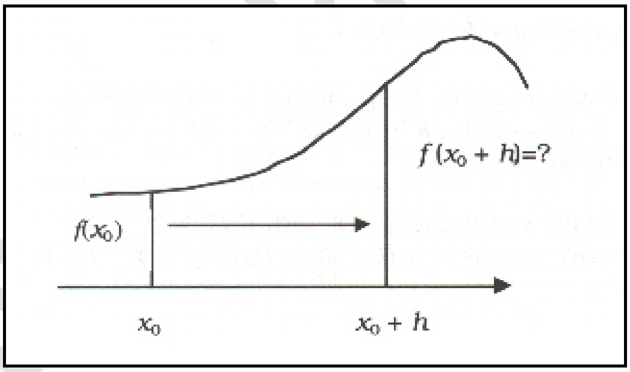

Figura 1. Planteamiento del problema de predicción

El planteamiento produce como respuesta la expresión

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)\,h + f''(x_0)\,h^2/2! + f'''(x_0)\,h^3/3! + \ldots,$$

donde se conocen los datos iniciales x_0, h, $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, $f'''(x_0)$,... y es necesario encontrar el valor de $f(x_0+h)$, como ilustra la Figura 1. Con estas consideraciones, la serie de Taylor se expresa de la siguiente forma:

Si p representa cierto parámetro físico en el instante (t), un momento después (dt) dicho parámetro será $p + dp$.

Si se conoce el estado inicial del fenómeno, esto es $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$,... se tiene que un instante después

$$f(t) = f(0) + f'(0)\,t + f''(0)\,t^2/2! + f'''(0)\,t^3/3! + ...$$

En los libros de física e ingeniería es frecuente hallar este tipo de ideas, que están vinculadas estrechamente a las nociones precauchianas de la serie de Taylor. Su conceptualización requiere que la serie sea pensada como un instrumento de predicción, no como un objeto de convergencia, tal como aparece en los manuales de matemáticas. Vamos a trabajar en un ejemplo.

Sabemos que las ecuaciones de la cinemática para el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado tienen la forma siguiente

$$s(t) = s_0 + v_0\,t + 1/2at^2$$
$$v(t) = v_0 + at$$
$$a(t) = a$$

Para deducir estas ecuaciones, según hemos visto en distintos textos escolares, se recurre a argumentos típicos como el geométrico, el algebraico y el de cálculo integral. Este acercamiento convencional posee el defecto de concebirse como un mero recurso aislado, sin conexión con el resto de los problemas ni en concepción ni en ejecución. Nuestra propuesta consiste en plantearlo bajo la consideración de que pretendemos encontrar una relación que permita determinar la dependencia entre las variables asociadas en su estado inicial. Esto es, establecer

$$s = s(s_0, v_0, a, t_0, t)$$

En tanto que se trata de un problema de *predicción*, pensamos en el fenómeno de movimiento y lo representamos por su instrumento natural de conocimiento, la serie de Taylor. Así, el valor futuro de la posición estará dado por

$$s(t) = s(0) + s'(0)\,t + s''(0)\,t^2/2! + s'''(0)\,t^3/3! + \ldots$$

Pero $s(0) = s_0$, $s'(0) = v_0$, $s''(0) = a$, $s'''(0) = 0$ y, como suponemos que esta última igualdad se da para cualquier tiempo –porque la aceleración es una constante–, entonces $s'''(0) = 0$, $s^{iv}(0) = 0, ... = 0$. De ahí que

$$s(t) = s_0 + v_0\,t + a\,t^2/2$$

Así se procede para determinar $v(t)$ y $a(t)$, es decir

$$v(t) = v_0 + a_0\,t \;\; \text{y} \;\; a(t) = a_0$$

Para estudiar el caso del movimiento con aceleración variable, tenemos

$$s(t) = s(0) + s'(0)\,t + s''(0)\,t^2/2! + s'''(0)\,t^3/3! + \ldots$$

Pero $s(0) = s_0$, $s'(0) = v_0$, $s''(0) = a_0$, $s'''(0) = a_1$. Como suponemos que esta última igualdad se da para cualquier tiempo, es decir, la a_1 es una constante, entonces $s^{iv}(0) = 0$, $s^{v}(0) = 0,... = 0$. De ahí que

$$s(t) = s_0 + v_0\,t + a_0\,t^2/2 + a_1\,t^3/6$$

2. LA EPISTEMOLOGÍA DE LOS OBJETOS MATEMÁTICOS INVOLUCRADOS EN LA INVESTIGACIÓN

Consideremos el binomio de Newton, que se escribe por vez primera como $(P+PQ)^{\frac{m}{n}}$, no como $(a+b)^n$. Señala Cantoral (1998) que las expresiones, aunque equivalentes matemáticamente, son distintas conceptualmente, debido a una concepción alternativa que se apoya en una epistemología sensiblemente diferente de la que hoy enseñamos en clase. De hecho, sostiene que ella obedece a un programa emergente en aquella época, una alternativa en el campo de las ciencias que busca modelar, anticipar o predecir fenómenos naturales con el respaldo matemático.

En ciertas situaciones necesitamos conocer el valor que tomará una magnitud *B* con el paso del tiempo. Sabemos, por ejemplo, que *B* depende a su vez de otra magnitud *P* que fluye incesantemente. De modo que si *P* evoluciona de una cierta manera, la cuestión central consiste en saber cómo será *B*(*P*) si conocemos el inicio de *P*, el cambio que sufre *P*, el cambio del cambio de *P*, etcétera.

Pero el caso de mayor interés se presenta cuando no se dispone en forma explícita de la relación entre *B* y *P*. Aquí habrá que hacer emerger progresivamente una nueva noción que permita de algún modo la generación de la solución, considerando tanto la diversidad de contextos en los que puede suceder la variación como la variedad de fenómenos estudiados con estrategias similares. En su momento, este programa newtoniano de investigación llevó al surgimiento de una progresiva cadena de elaboraciones teóricas, cada vez más abstractas, que culmina, por así decirlo, en el programa de Lagrange (Cantoral, 1990 y 2001).

Esta nueva noción, la *predicción*, se construye socialmente a partir de las vivencias cotidianas de los individuos, ya que en ciertas situaciones necesitamos conocer el valor que tomará una magnitud con el paso del tiempo. Se requiere determinar, entonces, el valor que asumirá la variable dependiente antes de que la independiente pase del estado uno al dos. Sin embargo, a causa de nuestra imposibilidad de adelantar el tiempo a voluntad, debemos predecir; en tal caso, no disponemos de razones para creer que el verdadero valor buscado esté distante de las expectativas que nos generan los valores en un inicio, de la forma en que cambian y evolucionan sus transformaciones, y así sucesivamente.

Por ejemplo, el flujo de agua se induce por la presencia de una diferencia de presión en sitios vecinos $p(x+dx)-p(x)$ que, en caso de ser nula, indicará equilibrio y, por tanto, ausencia de movimiento; en caso contrario anuncia la presencia del flujo, el cual habrá de darse en alguna dirección preferencial. Análogamente, la propagación del calor se determina por la presencia de una diferencia efectiva de temperaturas en puntos próximos $T(x+dx)-T(x)$. La transferencia de calor a un cuerpo obedece a la acción de la diferencia neta de la variación de la temperatura en puntos vecinos.

La naturaleza de los fenómenos de flujo señala la necesidad de estudiar expresiones del tipo $f(x+dx)-f(x)$, donde f puede representar una amplia gama de parámetros físicos particulares. Esta diferencia fundamental es el instrumento cognitivo por excelencia y participa de la naturaleza del fenómeno. La manera de anunciar su valor es proporcionada por el ambiente físico donde tiene lugar el fenómeno, y estará completamente determinada por el comportamiento de sus variaciones en el punto *x*:

$$f(x+h)-f(x)=f'(x)h+\frac{f''(x)h^2}{2!}+\frac{f'''(x)h^3}{3!}+\ldots$$

En nuestra opinión, estos hallazgos favorecen la discusión y elaboración de propuestas que traten sobre el *qué enseñar* y no –como ha sido habitual– sobre *cómo enseñar*. A manera de síntesis, nuestra línea de investigación toma como objeto de estudio la socioepistemología de los saberes matemáticos e incluye las intuiciones primarias del alumno con el fin de rediseñar el discurso matemático escolar (Cantoral y Farfán, 1998).

2.1. La idea germinal relativa a la noción de función analítica

Al iniciar esta investigación, tuvimos en cuenta una revisión histórica de las ideas que nos permitiera establecer la fenomenología intrínseca del concepto de serie de Taylor en su génesis (Cantoral, 1989) y en cuanto a la didáctica de antaño (Cantoral, 1995). En dicha revisión identificamos que la noción de predicción en los fenómenos de flujo continuo en la naturaleza se ubicó como la base de significación primaria para el concepto matemático de serie de Taylor. Un proceso de naturaleza simbiótica permitió el tránsito de una noción a otra entre dominios científicos contiguos, como la *predicción* propia de las ciencias experimentales y lo *analítico* de la matemática; esta significación de naturaleza física sufre un proceso predador de transposición didáctica que oculta su significación primera. El nuevo paradigma del cálculo asigna a la serie la significación propia de un resultado matemático, es decir, aquel que se nutre de la relación con otros objetos matemáticos (Cantoral, 1991).

Este análisis permitió reconocer la existencia de dos modelos didácticos para la enseñanza del cálculo que, en cierto sentido, coexisten en el discurso escolar contemporáneo. Uno es sugerido por los trabajos de Newton, Euler y Laplace, entre otros, donde la expresión de la serie lleva consigo un significado perteneciente a las ciencias experimentales, y que se introduce mediante una construcción natural para una gran variedad de problemas. El otro se desprende de los trabajos hechos por Cauchy, donde las series son un resultado más de la teoría, una consecuencia del concepto de límite y del teorema fundamental del cálculo. Como sabemos bien, el segundo esquema está presente en los cursos de cálculo actual, mientras que el primero, aunque se usa en varios contextos, no es contemplado en los temas que se imparten en la enseñanza secundaria no en la universitaria.

A continuación, consideremos un problema matemático que se planteó hacia el último decenio del siglo XVIII y fue resuelto en el primer tercio del XIX: ¿Es posible representar cualquier función real de variable real mediante una serie de potencias? Dada una función *f*, ¿existen coeficientes a_i reales, tales que $f(x)=\sum a_i x^i \ldots i=0,1,\ldots$? Lagrange argumentó que sí era posible, mientras que Cauchy mostró que no.

Hacia el ocaso del siglo XVIII se generalizó la discusión sobre los principios del cálculo diferencial o, como era habitual entonces, sobre la metafísica del cálculo infinitesimal. En esta atmósfera surgieron las propuestas de D'Alembert, con su definición de límite y el estudio de los coeficientes finitos de los elementos infinitesimales; la de Carnot sobre la idea de la compensación de errores, y la de Lagrange, sustentada en el desarrollo en series de potencias de las funciones. Nos detendremos en esta última por el uso que hace de la serie de Taylor, ya que desde la perspectiva de nuestro trabajo resulta indispensable desentrañar los argumentos que hicieron posible tal programa (Lagrange, 1797).

En el primer capítulo de *Theorie des fonctions analityques*, Lagrange explica la forma en que se obtiene el desarrollo en series de potencias de una función. Si se toma a la función $f(x)$ y se incrementa de x a $x+h$, donde h es una cantidad cualquiera indeterminada, la función devendrá en $f(x+h)$. Por la teoría de series, se tendría $f(x+h) = f(x) + ph + qh^2 + rh^3 + \text{etc.}$, donde $f(x)$ es la función primitiva y $p, q, r \ldots$ las funciones derivadas de la primitiva. A continuación, argumenta que excluye los términos de la forma $uh^{m/n}$ en la serie porque darían n distintos valores para el sumando del cual forman parte y, al combinarlo con aquellos valores de $f(x)$, surgiría una contradicción. En el siguiente artículo del mismo capítulo, Lagrange observa que $f(x+h)$ tendrá por valor a $f(x)$ para el valor particular $h = 0$, de ahí que $f(x+h)$ deba ser de la forma

$$f(x+h) = f(x) + hP,$$

donde P es una función tanto de x como de h, que no tiende a infinito cuando $h \to 0$. Lo mismo ocurre para P, pues $P = p + hQ$, donde hQ se anula cuando $h \to 0$ y Q es función de x y h. Así sucesivamente, se tendrá

$$f(x+h) = f(x) + hP = f(x) + hp + h^2Q = f(x) + hp + h^2q + h^3R, \ etc.$$

Del desarrollo anterior, aclara que para cada caso se proporciona el valor exacto del residuo $(Ph, Qh^2, Rh^3, \text{etc})$ y sólo el número de sumandos que se quieran. Este comentario, así como el párrafo siguiente en el escrito original, describen por sí solos su concepción en cuanto al uso que se espera tener de la serie y, por ende, del papel que en ella desempeña el residuo. Consideramos que esta observación arroja una información distinta sobre la evolución de las concepciones asociadas a la serie de potencias. En el artículo 6 del capítulo mencionado, Lagrange fundamenta lo que considera la principal ventaja de su método (1797, p. 14): que los primeros términos de las series, para valores pequeños de las variables, dominan al resto de los términos de la serie.

En los siguientes capítulos muestra la relación que guardan $p, q, r \ldots$ con la función $f(x)$, adquiriendo entonces la forma en derivadas:

$$f'(x), \frac{f''(x)}{2!}, \frac{f'''(x)}{3!}, \ldots$$

Finaliza su libro con una gama de aplicaciones en las que, efectivamente, se observa la serie truncada en algún sumando. Tales argumentos fueron impugnados por otros investigadores.

A continuación presentamos, a efectos de contraste, el acercamiento que hace Cauchy de la serie de Taylor y de su convergencia. Cauchy precedió al estudio de las series infinitas el análisis de su convergencia, de tal suerte que las series de Taylor serán entonces un ejemplo del estudio de series. Las series numéricas infinitas son el cuerpo del que se desprenderán, entre otras, las series de potencias. Cauchy rechazó la propuesta lagrangiana de fundamentación del cálculo diferencial porque demostró la existencia de funciones que, aunque su serie de Taylor converge, no tienen por límite a la función propuesta (Cauchy, 1829, p. 398). A continuación ponemos ejemplos de tales funciones:

$$f(x) = e^{-(\frac{1}{x})^2} \ , \quad f(x) = e^{-x^2} + e^{-(\frac{1}{x})^2}$$

Cauchy manifiesta una preocupación por la convergencia o, dicho de otro modo, por la garantía del acoplamiento de las gráficas del polinomio de Taylor y de la función en todo el intervalo centrado en el punto de contacto.

En el cálculo diferencial de Cauchy, las series de Taylor se presentan principalmente en el contexto de un teorema, son un resultado de la teoría, mientras que en la teoría de las funciones analíticas de Lagrange constituyen el punto de partida de todo el desarrollo ulterior.

Con su teoría, Cauchy inaugura el discurso matemático escolar vigente en nuestros días; sin embargo, los libros de texto (Lacroix, 1797) continuaron suponiendo, durante algunos años después de sus trabajos, que toda función era susceptible de desarrollarse en serie.

Un análisis profundo sobre los trabajos originales de Lagrange y Cauchy, efectuado por Cantoral (1990, 1995, 2001), ha proporcionado los elementos para un posible rediseño del discurso matemático escolar, ya que lejos de calificar a Lagrange de *algebrizante* o *limitado*, se vio que detrás de su epistemología hay un robusto cuerpo conceptual que podría dar lugar a nuevos acercamientos didácticos, los cuales sólo serán adecuados a sus fines si muestran que efectivamente pueden vivir entre los estudiantes en situación escolar. En dicho cuerpo conceptual, encontramos que la noción de predicción de los fenómenos de flujo continuo en la naturaleza se ubicó como la base de significación primaria para el concepto matemático de serie de Taylor.

Cuando se pone la atención en el fenómeno por encima del concepto, se trata de buscar la predicción de la posición vecina (futura) que se tendrá una vez que transcurra el tiempo, siempre que se posea información del estado inicial del movimiento. Es decir, si se conoce la posición inicial y la forma en que varía con el tiempo, entonces el objetivo consiste en predecir el estado vecino con los datos que inicialmente se poseen. Así, se tiene

$$s(t) \to s(t+h)$$

$$s(t+h) = s(t) + s'(t)h + s''(t)\frac{h^2}{2!} + \cdots$$

Es preciso observar la variación en su conjunto. Tal proceso necesariamente debe involucrar un mecanismo que nos permita decidir qué parte de la información total es suficiente para la descripción satisfactoria del fenómeno. Sin lugar a dudas, esto exige aceptar la posibilidad de predecir, de reconocer que el comportamiento del fenómeno (siempre que mantenga cierta regularidad) posee herencia: bastará conocer cómo varía en un inicio para indicar cómo lo hará posteriormente. Queremos señalar que, si se trabaja en los fenómenos con el soporte exclusivo de las clases de las funciones analíticas, no se pierde nada de lo que el discurso matemático escolar logra actualmente; por el contrario, se enriquece sobremanera al tomar como objeto de estudio la base fenomenológica de los significados de los entes matemáticos a partir de las intuiciones primarias del sujeto (Cantoral, 1990 y 2001).

La incesante relación entre el pensamiento físico y el pensamiento matemático brinda la oportunidad de contar con elementos ausentes en la matemática escolar, pero presentes en la del período histórico correspondiente. El objetivo es explorar e investigar la posibilidad de beneficiar las prácticas escolares a partir del conocimiento de la naturaleza y funcionamiento de tales relaciones:

- Responder, por ejemplo, por qué Lagrange creyó en la posibilidad de representar a toda función como una serie de Taylor y por qué, aún cuando Cauchy probó su imposibilidad, los textos de matemáticas y las prácticas de los científicos no excluían de sus cuerpos teóricos los acercamientos precauchianos

- Modificar las prácticas sociales de enseñanza tomando como elementos los hallazgos de una cierta epistemología, la cual permite asegurar que las razones de Lagrange para creer que toda función podría expresarse como serie de Taylor fueron más profundas que el sólo señalamiento de su *obsesiva* visión algebraica, como se aprecia en la opinión de Grattan-Guinness (1970)

Esta búsqueda permitió formular la hipótesis de que es posible reconstruir el discurso didáctico del cálculo, tomando como idea central de su desarrollo a la serie de Taylor. En otro sentido, dicha hipótesis señala que es posible rediseñar el currículum y su discurso didáctico en torno a aquello que, consideramos, resultó epistemológicamente indispensable en su génesis.

Por otra parte, cabe esperar, de acuerdo con las concepciones constructivistas del aprendizaje (Resnick, 1983), que las dificultades en la construcción de las ciencias tengan su correlato en el proceso de aprendizaje.

En esta investigación se examinan los mecanismos de construcción de conceptos y procesos matemáticos del cálculo infinitesimal, orientados por los aspectos del pensamiento físico de la *predicción* en los fenómenos de flujo continuo en la naturaleza. Es decir, se estudian aquellos mecanismos que operan el tránsito entre las nociones de predicción y lo analítico en dominios científicos contiguos: la *predicción* propia de las ciencias experimentales y la *función analítica* peculiar de las matemáticas. Para ello, nos basamos en el análisis que realizó Cantoral (1990 y 2001) sobre el concepto de serie de Taylor en su génesis histórica.

2.2. Desarrollo de la propuesta

Si los valores de un parámetro son conocidos en un único sitio espacial o temporal, digamos que para un valor $x = a$, ¿cómo podremos saber con estos datos el estado posterior de dicho parámetro, es decir, en un valor $a + h$? Para ello, consideremos la siguiente expresión:

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^{\infty} C_i \ ,$$

donde las C_i son las variaciones.

Es decir,

- $C_1 = f'(a)\ h$ es la primera variación de la función
- $C_2 = f''(a)\ h^2/2$ es la segunda variación de la función o, lo que es lo mismo, la variación de la variación
- $C_3 = f'''(a)\ h^3/3$ es la tercera variación, y así se continúa

Si al estado inicial le sumamos las infinitas variaciones, tenemos un valor del estado posterior del sistema. Para hallar la expresión analítica de la función que modela el fenómeno además debemos hallar, si las hay, las regularidades en las variaciones, es decir, cuándo las variaciones comienzan a tomar valores constantes o cuasiconstantes.

Por tanto, si reescribimos la serie de Taylor, presentada en el apartado 2.1, considerando $x - a = h$, queda

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)\ h + f''(a)\ h^2/2! + f'''(a)\ h^3/3! + \ldots + f^{(n)}(a)\ h^n/n! + ...,$$

de modo que, al conocer los valores de inicio a, h, $f(a)$, $f'(a)$, etcétera, se podrá anunciar el valor posterior del parámetro en cuestión; en este caso se trata del valor de $f(a+h)$. Aquí se hace evidente que la serie de Taylor es el instrumento idóneo para predecir el estado posterior del parámetro en fenómenos de flujo continuo en la naturaleza. Bajo la metodología que hemos reseñado anteriormente, analizaremos a continuación cuatro problemas típicos sobre la noción de predicción.

Problema 1: *Desde la terraza de un edificio de altura s_0 se lanza una pelota hacia arriba con una velocidad inicial v_0. La razón de cambio de la velocidad se mantiene constante, es decir $s'' = -g$, donde g es la aceleración de la gravedad. Predecir su posición para cualquier instante t.*

Si se recurre a la idea de predicción expuesta anteriormente, el problema consiste en hallar el valor posterior en términos de los datos iniciales: t_0, $s(t_0)$, $s'(t_0)$, $s''(t_0)$, $s'''(t_0)$, etc. Resulta evidente que como la serie de Taylor puede ser expresada de la forma:

$$s(t_0+h)=s(t)=s(t_0)+s'(t_0)(t-t_0)+\frac{1}{2!}s''(t_0)(t-t_0)^2+\cdots,$$

es el instrumento idóneo para conocer el estado posterior de nuestro parámetro.

A partir de la ecuación diferencial que regula el comportamiento entre las variables, tenemos que $s(t_0) = s_0$, $s'(t_0) = v_0$, $s''(t_0) = -g$, $s'''(t_0) = 0$,... Al efectuar el reemplazo en la serie, se obtiene:

$$s(t_0+h)=s(t)=s_0+v_0(t-t_0)-\frac{1}{2}(t-t_0)^2+0+0+\cdots$$

Si $t_0=0$, entonces adquiere el aspecto:

$$s(t)=s_0+v_0t-\frac{1}{2}gt^2$$

Problema 2: *Supongamos que una cierta población crece de forma que la razón de crecimiento especifico permanece constante, es decir,* $\frac{N'}{N}=k$. *Sea* N_0 *el número de individuos en el instante* t_0. *Predecir el tamaño de la población para un instante posterior t.*

Con el uso de la serie de Taylor como instrumento de predicción, vamos a hallar el tamaño de la población después de un cierto tiempo (t):

$$N(t)=N(t_0)+N'(t_0)(t-t_0)+\frac{1}{2!}N''(t_0)(t-t_0)^2+\frac{1}{3!}N'''(t_0)(t-t_0)^3+\cdots$$

Al ocupar la ecuación diferencial que nos muestra la relación entre las variables, tenemos que $N(t_0)=N_0$, $N'(t_0)=kN_0$, $N''(t_0)=k^2N_0$, $N'''(t_0)=k^3N_0$, $\cdots$

Al hacer el reemplazo en la serie anterior, se obtiene:

$$N(t)=N_0+kN_0(t-t_0)+\frac{1}{2!}k^2N_0(t-t_0)^2+\frac{1}{3!}k^3N_0(t-t_0)^3+\cdots$$
$$N(t)=N_0(1+k(t-t_0)+\frac{1}{2!}k^2(t-t_0)^2+\frac{1}{3!}k^3(t-t_0)^3+\cdots)$$
$$N(t)=N_0e^{k(t-t_0)}$$

Problema 3: Centremos nuestra atención en otro problema de la física que tiene innumerables aplicaciones: el movimiento armónico simple. A través de un movimiento armónico se puede describir una corriente en un circuito eléctrico, la concentración de iones en un plasma o la temperatura de un cuerpo, entre otros aspectos.

Consideremos el caso de un cuerpo, de masa m, que cuelga de un muelle vertical, como se muestra en la Figura 2.

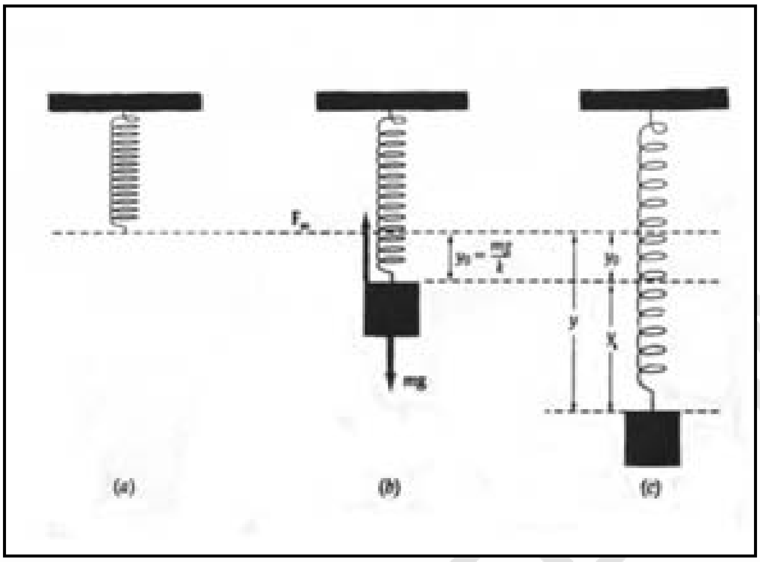

Figura 2. (extraída de Tipler, 1995, p. 380)

En dicha figura se observa lo siguiente: (a) muelle vertical sin deformar; (b) el muelle se alarga una cantidad $y_0 = mg/k$ cuando cuelga de él en equilibrio un objeto de masa m; (c) este oscila alrededor de su posición de equilibrio $y = y_0$ con un desplazamiento $y_1 = y - y_0$.

En la posición de equilibrio, las fuerzas que se ejercen sobre el cuerpo son

$$ky_0 = mg \ . \ . \ . \ (1)$$

Para hallar la ecuación que regula los cambios sucesivos entre las variables, utilizamos la segunda ley de Newton, $ma = F$.

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky + mg \ \ . \ . \ . \ (2)$$

donde y se mide hacia abajo, desde la posición sin deformar del muelle.

Podemos reescribir la ecuación tomando como origen la posición de equilibrio, $y = y_0$. Como y_1, y difieren sólo en una constante, sigue que $\frac{dy_1}{dt} = \frac{dy}{dt}$.

Al efectuar el reemplazo en (2), tenemos:

$$m\frac{d^2y_1}{dt^2} = -k(y_1 + y_0) + mg = -ky_1 - ky_0 + mg\ .$$

Con el uso de (1), obtenemos la ecuación diferencial deseada:

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} = -\frac{k}{m}y_1$$

A partir de esta ecuación es posible obtener algunos valores de las derivadas sucesivas de la función en puntos particulares. Para ello, resulta necesario conocer algunos valores iniciales como $y_1(0)$, $(\frac{dy_1}{dt})_{t=0}$, $(\frac{d^2y_1}{dt^2})_{t=0}$.

Consideremos que se separa el cuerpo de su posición de equilibrio en un valor *A*, es decir, el desplazamiento toma su valor máximo, $y_1(0) = A$ para el instante *t*=0. En ese momento el objeto está en reposo, por lo que $(\frac{dy_1}{dt})_{t=0} = 0$ y $(\frac{d^2y_1}{dt^2})_{t=0} = -\frac{kA}{m}$.

Debido a que la idea de predicción permite enunciar el valor futuro de un parámetro sólo con los valores de la variable y de sus variaciones en un inicio, usaremos la serie de Taylor en términos de los valores iniciales:

$$y_1(t) = y_1(0) + (\frac{dy_1}{dt})_{t=0}t + (\frac{d^2y_1}{dt^2})_{t=0}\frac{t^2}{2!} + (\frac{d^3y_1}{dt^3})_{t=0}\frac{t^3}{3!} + \cdots,$$

con lo que obtenemos

$$y_1(t) = A - A\frac{kt^2}{m2!} + A\frac{k^2t^4}{m^2 4!} - A\frac{k^3t^6}{m^3 6!} + \cdots$$

Al sustituir $k/m = w^2$, se obtiene[4]

$$y_1(t) = A(1 - w^2\frac{t^2}{2!} + w^4\frac{t^4}{4!} - w^6\frac{t^6}{6!} + \cdots)$$

Si se observa que la expresión entre paréntesis es el desarrollo en serie de $\cos(wt)$, entonces se puede escribir

$$y_1(t) = A\cos(wt)$$

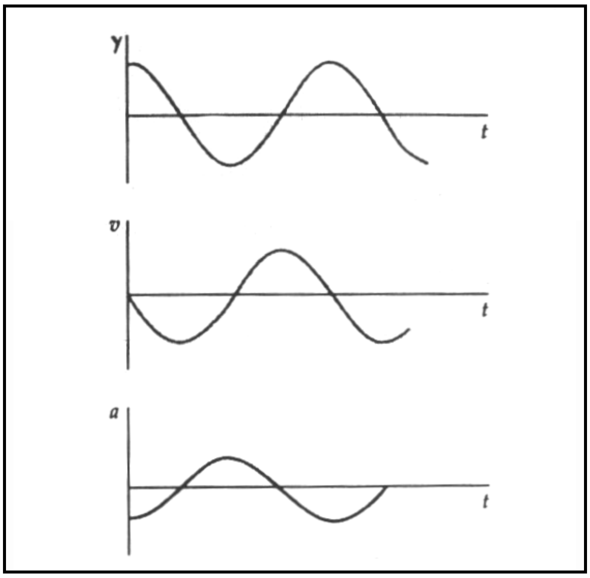

Figura 3. El desplazamiento y_1, la velocidad v y la aceleración a en función del tiempo t

En la Figura 3 se nota que la aceleración es proporcional y de sentido opuesto al desplazamiento.

Problema 4: Flujo en tuberías (Ley de Poiseuille).

Consideremos una situación como la de la figura que se presenta a continuación (Rémizov, 1991, p. 178).

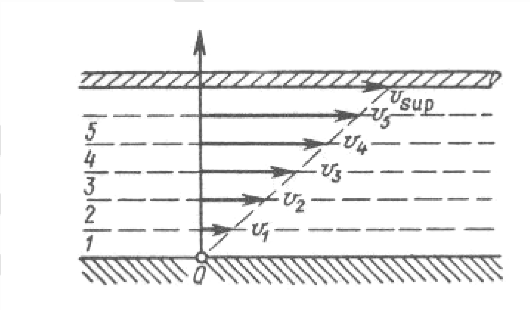

Figura 4. Flujo entre dos placas paralelas

Analizamos aquí el flujo de un fluido viscoso comprendido entre dos placas paralelas de área S. La placa inferior tiene una velocidad $v_0 = 0$ y la superior $v = v_{sup}$. El líquido que hay entre ellas está dividido en capas que se desplazan unas sobre otras; las adyacentes a las placas están adheridas a ellas y se desplazan con su misma velocidad. La capa que se mueve con una velocidad mayor imprime a la capa que tiene menor velocidad una fuerza que acelera el movimiento de esta, y viceversa; de parte de la capa más lenta se imprime una fuerza sobre la más rápida que retarda su movimiento. Estas fuerzas, que se denominan de rozamiento interno, van dirigidas tangencialmente a la superficie de las capas. La fuerza de rozamiento interno es proporcional al área S de las capas de interacción y será tanto mayor cuanto mayor sea su velocidad relativa. La separación en capas es convencional, mientras que la fuerza suele expresarse en dependencia de la variación de la velocidad referida a la longitud en la dirección perpendicular a la velocidad, o sea, en función de dv/dx, que es el gradiente de velocidad (velocidad de desplazamiento):

$$F_{roz} = \eta \frac{dv}{dx} S$$

Esta es la ecuación de Newton. Aquí η es el coeficiente de proporcionalidad, al que se conoce como *viscosidad*, y depende tanto del estado como de las propiedades moleculares del fluido.

Debido a la simetría queda claro que en un tubo las partículas del fluido equidistantes respecto al eje tienen igual velocidad. La mayor velocidad la poseen las partículas que se mueven a lo largo del eje del tubo; la capa de líquido más próxima al tubo está inmóvil.

Para determinar la dependencia de $v = v(r)$, separemos imaginariamente un volumen cilíndrico de líquido con cierto radio r y cierta longitud l, como puede verse en la figura siguiente:

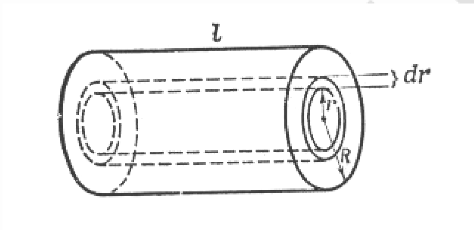

Figura 5. Volumen cilíndrico de radio r y longitud l

Este pequeño cilindro se halla en un equilibrio (moviéndose con velocidad constante) accionado por la fuerza, debido a la diferencia de presión entre sus extremos, menos la fuerza retardadora de viscosidad que actúa en su superficie exterior. La primera de dichas fuerzas vale

$$F = p_1 \pi r^2 - p_2 \pi r^2 = (p_1 - p_2)\pi r^2$$

La fuerza de viscosidad, en virtud de la ecuación de Newton, es

$$F_{roz} = \eta \frac{dv}{dr} S = \eta \frac{dv}{dr} 2\pi r l$$

donde $S = 2\pi r l$ es el área de la superficie lateral del cilindro.

Al igualar ambas fuerzas, se obtiene:

$$(p_1 - p_2)\pi r^2 = -\eta \frac{dv}{dr} 2\pi r l$$

El signo menos en el segundo miembro de la ecuación se debe a que $\frac{dv}{dr} < 0$ (la velocidad disminuye con el aumento de *r*). Por tanto, la variación de *v* con *r* viene dada por $\frac{dv}{dr} = -Nr$, donde $N = \frac{(p_1 - p_2)}{2l\eta}$.

S tenemos en cuenta los valores de frontera ya considerados, $v(0) = v_{máx}$ y $v(R) = 0$, podemos predecir el valor de $v(r)$ a través de la serie de Taylor, de la siguiente manera:

$$v(r) = v(0) + v'(0)\, r + v''(0)\, r^2/2! + v'''(0)\, r^3/3! + ... = v_{máx} - Nr^2/2.$$

Como $v(R) = v_{màx} - \frac{NR^2}{2}$, de aquí obtenemos $v_{máx} = (p_1 - p_2)\frac{R^2}{4l\eta}$ y, por tanto,

$$v(r) = (R^2 - r^2)\frac{(p_1 - p_2)}{4l\eta}.$$

Hemos hallado la velocidad de la corriente del líquido en función de la distancia al eje del tubo. Es decir, esta ecuación muestra la dependencia parabólica de la velocidad con el radio, que presentamos en la Figura 6 (Rémizov, p. 180):

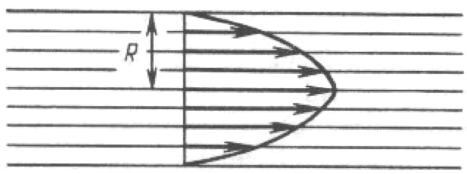

Figura 6. Velocidad de un fluido en el interior de una tubería

Ahora determinemos el volumen V de líquido que sale del tubo en un tiempo determinado *t*. Para ello, es necesario establecer de qué factores depende el volumen del líquido que fluye por un tubo horizontal. Con tal fin, consideremos una capa cilíndrica de radio r y espesor dr (Figura 5); por cuanto la capa es delgada, se puede considerar que se desplaza con igual velocidad, v. En el tiempo t, la capa transporta el siguiente volumen de líquido:

$$dV = vt2\pi r dr$$

Al sustituir v por su valor, obtenemos la ley de variación del volumen con el radio:

$$\frac{dV}{dr} = \frac{\pi(p_1 - p_2)t}{2l\pi}(R^2 r - r^3)$$

La reescribimos como

$$\frac{dV}{dr} = M(R^2 r - r^3), \text{ donde } M = \frac{(p_1 - p_2)}{2l\eta}t\pi.$$

Si tenemos en cuenta que $V(0) = 0$, podemos predecir el volumen de líquido que pasa por un tubo de longitud l y radio r utilizando la serie de Taylor, de la siguiente manera:

$$V(r)=V(0)+V'(0)r+V''(0)\frac{r^2}{2!}+V'''(0)\frac{r^3}{3!}+V^{(IV)}(0)\frac{r^4}{4!}+V^{(V)}(0)\frac{r^5}{5!}+\ldots$$
$$V(r)=\frac{1}{2}MR^2r^2-\frac{1}{4}Mr^4=\frac{1}{4}Mr^2(2R^2-r^2)=\frac{\pi(p_1-p_2)}{8\eta l}(2R^2r^2-r^4)t.$$

El volumen de líquido en la unidad de tiempo para $r=R$ nos da el caudal

$$Q=\frac{\pi(p_1-p_2)}{8\eta l}R^4 \text{ (Ley de Poiseuille)}$$

Como se advierte por esta fórmula para las condiciones externas prefijadas (p_1 y p_2), fluye una mayor cantidad de líquido por el tubo cuanto menor sea su viscosidad y mayor el radio del tubo. La fuerte dependencia de Q respecto al radio viene condicionada por la variación no sólo del volumen, sino también de las capas dispuestas cerca de la superficie del tubo.

3. EXPERIMENTACIÓN

A continuación transcribimos un fragmento de los episodios de aprendizaje obtenidos con 11 alumnos de primer año de la licenciatura en Biología (curso 2002-2003) de la Universidad de Jaén, España. Mostramos la parte experimental para ir logrando la construcción de la noción de predicción; trabajamos con los **Problemas 1** y **3**.

I. Etapa de aprendizaje individual

Los alumnos trabajaron en forma individual el **Problema 1**, disponiendo de 45 minutos. Para el análisis de sus producciones diseñamos categorías con las diferentes argumentaciones, interpretaciones y conclusiones que aparecieron en las construcciones. Después catalogamos las respuestas, obteniendo así una puntuación media.

Para evaluar en forma cuantitativa hemos seguido a Cajaraville (1996, p. 110), sobre estos criterios:

CATALOGACIÓN DE LA RESPUESTA	PUNTAJE
En blanco o totalmente errónea	1
Uso de conceptos o procedimientos próximos sin éxito	2
Uso de conceptos y procedimientos próximos y/o adecuados, con éxito limitado o con lagunas en la argumentación	3
Respuesta correcta	4

Tabla 1. Formas de catalogar las respuestas

1.Categorización de la producción de los estudiantes

Para su categorización, la producción de los estudiantes será considerada de la manera siguiente:

- Satisfactoria (S), si en ella se atiende satisfactoriamente a los siguientes elementos:

1. Determinación de los parámetros constantes y variables
2. Condiciones iniciales
3. Relación que liga las variables
4. Cálculo de las variaciones
5. Planteo de la serie
6. Análisis de las regularidades que se presentan en las variaciones
7. Presentación del modelo buscado

- Medianamente satisfactoria (MS), si se observan sólo los primeros cinco elementos enunciados arriba
- Poco satisfactoria (PS), si se observan los cuatro primeros elementos
- No interpreta el problema o es totalmente erróneo (NI)

La Tabla 2 ilustra las respuestas de los alumnos, de acuerdo con las categorías anteriores:

Alumno	**Categoría**
Alicia	S
Carlos	S
Mercedes	S
María J.	S
Águeda	NI
Francisco	S
Josefa	S
Daniel	NI
Purificación	PS
Marta	NI
Elena	PS

Tabla 2. Categorización de respuestas sobre el Problema 1

2. Observaciones

El 55 % interpreta el problema como una predicción y llega a una respuesta satisfactoria, un 18 % lo hace en forma poco satisfactoria y un 27 % no interpreta el problema.

3. Catalogación de las respuestas

Utilizamos los mismos criterios y puntuaciones que en las situaciones anteriores.

Catalogación de las respuestas

	PUNTOS				PUNTUACIÓN MEDIA
	1	2	3	4	
NÚMERO DE ALUMNOS	2	2	0	6	2.7

Tabla 3. Catalogación del problema 1

4. Conclusiones

Creemos que se han obtenido resultados alentadores en cuanto al uso de la herramienta de predicción, si bien debemos tener en cuenta que esta situación no ha presentado para el alumno más problemas de interpretación que la expresión *velocidad de cambio*. Queremos resaltar que la mayoría de los alumnos había visto, en forma muy sucinta, el concepto de la *fórmula y serie de Taylor*. El concepto de polinomios de Taylor, desde comienzos de los años noventa, no se incluye en los programas de enseñanza secundaria en España.

II. Aprendizaje cooperativo

A partir de los resultados de los alumnos en la resolución del **Problema 1**, conformamos tres equipos heterogéneos:

♣ *Equipo 1 (E1)****: Alicia (A), Carlos (C) y Mercedes (M)***
♣ **Equipo 2 (E2)**: María José (MJ), Águeda (ÁG), Francisco (F) y Josefa (J)
♣ **Equipo 3 (E3)**: Daniel (DR), Purificación (P), Marta (M) y Elena (E)

En esta etapa, que duró aproximadamente 1 hora, nuestra participación sólo tuvo un carácter organizativo. Grabamos en cintas de audio los intercambios verbales, de los que presentamos a continuación unos fragmentos. El significado de algunos símbolos que hemos utilizado en la trascripción de los diálogos en el seno de los equipos es el siguiente:

- // se produce un silencio
- **...** frase inconclusa
- **...** cuando se encuentran solos en un renglón significan que continúan los intercambios verbales entre los componentes del grupo, sin relevancia, en nuestra opinión, para el aprendizaje

Para llevar a cabo un análisis cuantitativo de esta etapa de aprendizaje, una vez que hemos trascrito el material grabado en audio, estudiamos las relaciones de los intercambios verbales que aparecen en los episodios de aprendizaje seleccionados entre los equipos de estudiantes. Esto nos dará información sobre el aprendizaje que sus miembros experimentan tanto colectiva como individualmente.

La siguiente tabla contiene las categorías, subcategorías y puntuación que vamos a utilizar para el análisis de las verbalizaciones de los estudiantes en los distintos episodios de aprendizaje.

DE CARÁCTER COGNITIVO			**DE CARÁCTER ORGANIZATIVO**
Emisiones	*Recepciones*	*Práctica posterior*	

Dar ayuda (DA), (1) Pedir ayuda (PA), (0)	Recibir ayuda con petición (RA), (1)	Poner en práctica la ayuda recibida (UAR), (1)	
Cometer errores (E), (0)	Contestarse a sí mismo (AR), (0)	Expresar aprobación (EA), (0)	

Tabla 4. Categorías, subcategorías y puntaje para las verbalizaciones

A continuación, damos comienzo al análisis por equipos.

♣ *EQUIPO 1*

1. Episodio de aprendizaje

–1 (C): Tenemos la segunda derivada, $s'' = -g$, *s en* t_0. Es decir, *s* en el primer instante, que es s_0, y $s'(0)$, que nos da el problema porque nos dice que la velocidad en t_0 es igual a v_0, y como la velocidad es la primera derivada de la ecuación $s(t)$, que es lo que nos piden, pues directamente ya $s'(0)$ es v_o, independientemente de lo que sea s' en cualquier instante $(s'(t))$. Luego, hallando la tercera derivada en 0 $(s'''(0))$ sería igual a 0 ¿Por qué? Porque no hay ninguna variable y, por tanto, se nos va a quedar 0 al derivar; es el último término que necesitamos saber para hacer la serie de Taylor..., como s'' nos dicen que es $-g$, $s''(0)$ será 0, porque como no hay ninguna variable t, es decir, $-g$ es una constante, y ya directamente sería 0 (al derivar). No, en esto me he equivocado, a ver...

–2 (A): Es que esto sería una constante...

–3 (C): No, está bien. Sí, es que he hecho la tercera primero y luego la segunda... Luego, ya directamente con todo esto, sustituimos y obtenemos la serie de Taylor, que sería $s(t) = f(a) + f'(a)(t-a) / 1! + f''(a)(t-a)^2 / 2! + f'''(a)(t-a)^3/3! + \ldots$, siendo $a = 0$. Entonces sustituimos y obtenemos $s(t) = f(0) + f'(0)t + f''(0)t^2/2 + \ldots$, que en nuestro caso $s(t) = s_0+v_0\, t-1/2gt^2$ y ya está. La dificultad de este problema era que no nos daban información suficiente para hallar las derivadas genéricas, esto es, las derivadas en cualquier tiempo, en función de *t*, pero como nos daban directamente la derivada que nosotros queríamos, que era la derivada segunda, en t_0, y la primera, también en t_0, que era la v_0, además del primer termino, s_0, con eso hallaríamos la serie de Taylor. Como la derivada segunda era una constante, con eso ya sabemos que la derivada tercera es 0, único término que teníamos que hallar para completar la serie de Taylor. El primer término es igual a s_0; el segundo término, la primera derivada en t_0, es igual *a* v_0, y el tercer término, la tercera derivada en t_0, es igual a $-g$.

–4 (A): Además, fíjate que esto es una ecuación de estas de física.

–5 (C): Exactamente, sería...

–6 (A): Espacio más...

–7 (C): Sí, sí, la ecuación de un movimiento rectilíneo y acelerado, ¿no? Bueno, no estoy seguro si será rectilíneo, pero aceleración sí tiene porque está t^2...

–8 (A): Sí, eso es.

2. Análisis de las verbalizaciones

El análisis de las verbalizaciones producidas por el Equipo 1 en torno al Problema 1 arrojó los siguientes resultados:

Verbalizaciones	Alicia	Carlos	Mercedes
1		DA(1)	
2	DA(1)		
3		DA(1)	
4	DA(1)		
5		EA(0)	
6	PA(0)		
7		DA(1)	
8	EA(0)		
$\bar{x}$	0.3	0.4	0

Tabla 5. Verbalizaciones producidas por el E1 en el Problema 1

Mercedes no toma parte en esta discusión, en tanto que Alicia y Carlos van construyendo de forma satisfactoria la solución al problema. Al final, nos parece que se dan cuenta de que han obtenido una ecuación conocida de las clases de física.

♣ *EQUIPO 2*

1. Episodios de aprendizaje

...

–1 (ÁG): Primero tenemos que calcular la función posición de la pelota. Para ello, lo que el problema nos da es la segunda derivada, que es igual a $-g$, que es la aceleración de la gravedad y también podemos saber v y s a partir del enunciado.

–2 (MJ): Entonces, tenemos que la segunda derivada es la aceleración, que es $-g$ (la gravedad) y al sustituirla por 0 da $-g$. La primera derivada es la velocidad y al sustituirla por 0 da la velocidad inicial, v_0. La función posición, al sustituirla por 0, da la posición inicial, que es s_0.

–3 (F): La tercera derivada de $s(t)$ es igual a 0 y todas las demás derivadas que siguen también serían iguales a 0. Entonces, tenemos que al sustituir en la serie de Taylor $s(t)= s(0)+s'(0)/t/1!+s''(0)t^2 /2+$.

–4 (MJ): Entonces, el resultado final sería $s(t) = s_0+ v_0\, t\text{-}1/2gt^2$.

–5 (F): Y sustituyendo cualquier valor de t en la función posición podemos saber la posición de la pelota en cada instante.

2. Análisis de las verbalizaciones

El análisis de los intercambios verbales que surgieron en el Equipo E2 al discutir el Problema 1 se detalla en la siguiente tabla:

Verbalizaciones	María José	Águeda	Francisco	Josefa
1		DA(1)		
2	DA(1)			
3			DA(1)	
4	DA(1)			
5			DA(1)	
$\bar{x}$	0.4	0.2	0.4	0

Tabla 6. Verbalizaciones producidas por E2 en el Problema 1

En este caso, Josefa se mantiene al margen de la discusión. Sus compañeros, cuyas emisiones en todos los casos son satisfactorias, obtienen un buen puntaje, aunque María José y Francisco son los más favorecidos porque participaron más en un cierto sentido.

♣ *EQUIPO 3*

1. Episodios de aprendizaje

...

–**1(DR)**: Bueno, aquí es lo que dijimos de lo de la ecuación de física... aquélla que era $s(t) = s_0+v_0t–1/2at^2$ y, al derivarla, quedaba $s'(t) = v_0–at$. Y al hacer la segunda derivada ya quedaba la aceleración negativa, lo mismo que nos da el problema.

–**2 (E)**: Entonces, en la serie de Taylor incluimos la función primitiva inicial, la fórmula del espacio, la primera derivada… la segunda derivada ya no se podría derivar, ¿no? Sería una serie de Taylor de tres...

–**3 (P)**: De tercer grado.

–**4 (DR)**: ¿Entonces, más o menos, cómo quedaría la serie de Taylor? //

–**5 (M)**: Quedaría $s(t) = s_0+v_0t–1/2at^2+ v_0 –at$ por...

–**6 (E)**: Por $x-t$ creo yo que sería.

–**7 (M)**: ¿ x aquí qué sería?

–**8 (P)**: …// ¿Qué es lo que sería x ? ¿Qué es lo que nos daría? Eso es lo que no sé. Si nos daría la altura o la velocidad o qué.

–**9 (E)**: Esa x que no sabemos cuál... ¿Qué valor sería en esta función?

–**10 (DR)**: Pero es que aquí creo que no tendríamos por qué poner x. Tenemos que las incógnitas son s_0 y la s.

–**11 (M)**: Yo creo que puse s_o y t.

–12 (DR): Claro, yo creo que x tampoco hay que ponerlo. Yo creo que hay que poner a *t*, que es una de las incógnitas que dependiendo del tiempo pueden tener un... y la posición va a ser la otra incógnita, que es s_o o *s*.

–13 (E): Pero tú piensas que *x* es una función. Cuando pones $f(x)$, x es una función, no es un número como a. Y aquí s_o y v_o son números.

–14 (DR): s_o tú lo puedes poner como x_o; s_o también es una función. ¿Entiendes lo que te digo?

–15 (E): No es una función porque tú cuando derivas te queda, se te va entero, se te va s_o. Se queda 0 ahí.

–16 (P): Pero eso se te va porque no está en función del tiempo.

–17 (E): Pues eso, pero es un número, no una función. Es que aquí en cambio si derivas se queda 1. Si tú tienes *x*, aquí derivas y se queda 1.

–18 (M): Tenemos que buscar un número... Lo que no sabemos es cuál tiene que ser.

–19 (E): Claro, si estamos de acuerdo, si es lo que yo he dicho. Sería cualquier número menos *t*.
–20 (P): No sabemos si va a dar la posición o la velocidad, o qué es lo que se va a tomar para ponerlo ahí.

–21 (E): Bueno, pues ponemos *a*, porque si no lo sabemos ponemos como si fuera *a*. Tenemos *a*... Bueno, sigue.

–22 (M): A ver, quedaría lo siguiente

$$s(t) = s_0+v_0t-1/2at^2+v_0-gt(t-x)/1!+(-g)(t-x)^2/2$$

Y luego no se puede seguir porque ya es $-g$.

–23 (DR): Y es una constante y al hacer la derivada queda 0, ¿no?

–24 (P): Bueno, pues la *g* se queda 0 porque creemos...

–25 (DR): No queda 0; es negativa.

–26 (P): Es negativa, perdón, porque creemos que va en contra del movimiento, que lo impide, ¿no?

–27 (DR): Depende también de cómo tomemos el origen del movimiento.

–28 (P): Sí.

–29 (DR): Que aquí al ser la aceleración 0 quiere decir que la... El punto de origen es el suelo.

–**30 (E)**: Claro.

–**31 (DR)**: ¿No? Que depende también de si tomamos, por ejemplo, el punto de origen a 20 metros del suelo. Entonces ahí varía...

–**32 (P)**: Y porque si tomamos como punto de origen la velocidad que alcanza la pelota, pues a partir de ese punto, en el que se para, ya la aceleración sería positiva porque facilitas el movimiento. Va cayendo, entonces sería positiva.

–**33 (DR)**: Eso depende de dónde se tome el punto de...

–**34 (P)**: El origen.

2. Análisis de las verbalizaciones

A continuación, desglosamos el análisis de los intercambios verbales que se dieron en el Equipo 3 al abordar el Problema 1.

Verbalizaciones	Daniel	Purificación	Marta	Elena
1	DA(1)			
2				E(0)
3		EA(0)		
4	PA(0)			
5			E(0)	
6				E(0)
7			PA(0)	
8		PA(0)		
9				PA(0)
10	E(0)			
11			E(0)	
12	DA(0)			
13				DA(1)
14	E(0)			
15				E(0)
16		DA(1)		
17				E(0)
18			PA(0)	
19				E(0)
20		E(0)		
21				I(0)
22			E(0)	
23	EA(0)			
24		EA(0)		
25	PA(0)			
26		E(0)		
27	E(0)			
28		EA(0)		
29	E(0)			

30					EA(0)
31	PA(0)				
32		E(0)			
33	E(0)				
34		EA(0)			
$\bar{x}$	0	0	0	0	

Tabla 8. Verbalizaciones producidas por E3 en el Problema 1

La larga discusión mantenida por este equipo no nos aportó resultados positivos. Creemos que ello se debe a que tienen dificultades para reconocer las condiciones iniciales del problema; más aún, al parecer no pueden determinar las variables que intervienen en la solución. Observamos alguna de las expresiones textuales a las que consideramos como muy significativas: "Cuando pones $f(x), x$ es una función, no es un número como a".

III. Etapa de institucionalización

Esta fase del aprendizaje se trabajó mediante entrevistas personales, dedicando una hora para cada alumno. Aquí nos basamos en las producciones personales y en equipo obtenidas por los estudiantes durante las **etapas de aprendizaje** anteriores. Básicamente se indagó y discutió sobre el reconocimiento de los parámetros que describen el sistema en el estado inicial. Nos centramos en la forma de la serie que más ilustra la idea que queremos desarrollar:

$$f(x) = f(x_0 + h) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{\infty} C_i \ ,$$

donde C_i son las variaciones.

A partir de ella se trabajó también en el significado de las distintas variaciones, la forma de obtenerlas y sus regularidades. La mayor dificultad se encontró, como se había puesto de manifiesto en las etapas anteriores, al momento de determinar los parámetros que describen el sistema en el estado inicial. Creemos, sin embargo, que han superado esta dificultad.

Esta etapa de aprendizaje concluyó con un trabajo individual de los alumnos. Para ello, se les presentó el **Problema 3**, sobre el cual trabajaron en una sesión de una hora. A través de la producción de los estudiantes en este problema, hemos querido observar e indagar en algunos comportamientos específicos, como son:

a) Interpretación y determinación de los valores iniciales del sistema
b) Reconocimiento de la serie de Taylor como herramienta para resolver el problema
c) Destreza en el manejo de las derivadas sucesivas y la serie

A cada uno de estos comportamientos le asignaremos un puntaje que va del 0 al 1. Los resultados del análisis sobre la producción de los estudiantes en el **Problema 3** aparecen en la siguiente tabla.

Alumno	Problema 3			Puntuación %
	a	b	c	
Alicia	0.7	0.8	1	83
Carlos	1	0.5	0.5	67
Mercedes	0.8	0.8	0.6	73
María José	0.5	0.6	0.6	57
Águeda	0.8	0.5	0.5	60
Francisco	1	1	1	100
Josefa	0.6	0.8	0.5	63
Daniel	1	1	0.5	83
Purificación	1	1	1	100
Marta	1	1	1	100
Elena	0.6	0.8	0.6	67
%	82	80	71	

Tabla 9. Análisis de la producción de los estudiantes en el Problema 3

El puntaje que logró cada alumno en forma individual puede apreciarse en la columna de la derecha. Los resultados fueron muy satisfactorios, ya que diez de once alumnos pasaron de la media y tres de once alcanzaron un puntaje superior al 95 %. En la última fila se encuentra el puntaje (%) correspondiente a cada uno de los comportamientos que nos propusimos observar en este problema. Con tales datos, podemos inferir que estos comportamientos quedaron superados en tres cuartas partes de los casos.

4. CONCLUSIONES

En los dos primeros problemas se pone de manifiesto que el estado ulterior del fenómeno de variación depende completamente de las circunstancias que caracterizan el estado de hecho. La evolución de un sistema está determinada completamente por sus variaciones primeras; por ello, hablamos del carácter hereditario del cambio.

Con el tercero y el cuarto problema hemos mostrado la posibilidad de obtener, con cierta naturalidad, el planteamiento y la resolución de problemas que, en los manuales escolares de tal nivel, se presentan como algo muy complejo y fuera del alcance del texto. Es evidente que, de esta manera, la determinación de las condiciones iniciales y la resolución misma de los problemas sigue una lógica de solución explícita y, eventualmente, bajo el control del alumno. Así, las nociones de predicción en los fenómenos naturales de flujo y de lo analítico en el cálculo se presentan como estrategias naturales de construcción del saber matemático.

En términos de modelos didácticos para la enseñanza del cálculo, con este análisis hemos pretendido mostrar dos aproximaciones. La primera fue generada por los trabajos de Newton, Euler y Laplace, entre otros, donde la expresión de las series lleva consigo un significado perteneciente a las ciencias físicas, el cual es introducido en una construcción natural para una vasta diversidad de problemas. La segunda surgió por los trabajos de Cauchy, donde las series devienen en un resultado más de la teoría, una consecuencia del concepto de límite y de algunos teoremas.

Como sabemos bien, el segundo esquema aparece en los cursos de cálculo actual, mientras que el primero, aunque se usa en varios contextos, está omitido en los temas que se imparten tanto en la enseñanza secundaria como en la universitaria.

Creemos que con esta nueva perspectiva hemos dotado de una cierta naturalidad al planteamiento y a la resolución del problema. Este proceso también se revela vivo si analizamos las producciones originales de los científicos de otros siglos y los manuales escolares de otras épocas.

BIBLIOGRAFIA

Azcárate, C. (1990). *La velocidad: Introducción al concepto de derivada*. Tesis de doctorado. Universidad Autónoma de Barcelona, España.

Buendía, G., Cordero, F. (2004). Prediction and the periodical aspect as generators of knowledge in a social practice framework. A socioepistemological study. *Educational Studies in Mathematics* [aparecerá en el número 59, volumen 2, 2005].

Cajaraville Pegito, J. A. (1996). *Evaluación del significado del cálculo diferencial para estudiantes preuniversitarios. Su evolución como consecuencia de una ingeniería didáctica alternativa*. Tesis de doctorado, Universidad de Santiago de Compostela, España.

Cantoral, R. (1989). Concept image in its origins with particular reference to Taylor's serie. *Proceedings of International Conference of Psychology of Mathematics Education*. North American, Chapter 11, pp. 50-60.

Cantoral, R. (1990). *Categorías relativas a la apropiación de una base de significaciones propias del pensamiento físico para conceptos y procesos matemáticos de la teoría elemental de las funciones analíticas*. Tesis de doctorado, Cinvestav, México.

Cantoral, R. (1991). Proyecto de investigación: Formación de la noción de función analítica. *Mathesis 7*, pp. 223-239.

Cantoral, R. (1995). Acerca de las contribuciones actuales de una didáctica de antaño: el caso de la serie de Taylor. *Mathesis 11*(1), 55-101.

Cantoral, R. (1998). *Pensamiento matemático avanzado: una revisión de los enfoques a la investigación sobre didáctica del análisis*. Centre de Recerca Matemàtica del Institut D'Estudis Catalans. Barcelona, España: CRM-Notes.

Cantoral, R. (2001). *Matemática educativa: Un estudio de la formación social de la analiticidad*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R., Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Epsilon 42*, volumen 14 (3), 353-369 [número monográfico].

Cantoral, R., Farfán, R.-M. (2004). La sensibilité à la contradiction : logarithmes de nombres négatifs et origine de la variable complexe. *Recherches en Didactique des Mathématique. 24* (2.3), 137-168.

Cantoral, R., Reséndiz, E. (2003). El papel de la variación en las explicaciones de los profesores: Un estudio en situación escolar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 6*(2), 133 – 154.

Cauchy, A. L. (1829). Leçons sur le calcul différentiel. En *Oeuvres completes*. Paris, France.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 4* (2), 103-128.

Dolores, C., Alarcón, G. y Albarrán, D.F. (2002). Concepciones alternativas sobre las gráficas cartesianas del movimiento: el caso de la velocidad y la trayectoria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 5* (3), 225-250.

Farfán, R. M. (1997). *Ingeniería didáctica: Un estudio de la variación y el cambio*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Gil, D.; Carrascosa, J.; Furió, C., y Martínez Torregrosa, J. (1991). *La enseñanza de las ciencias en la educación secundaria*. Barcelona, España: ICE/Horsori.

Grattan-Guinness, I. (1970). *The development of the foundations of mathematical analysis from Euler to Riemann*. Cambridge, USA: Cambridge University Press.

Holton, S. (1979). *Introducción a los conceptos y teorías de las ciencias físicas*. Barcelona, España: Reverté.

Lacroix, S. F. (1797). *Traité elementaire de calcul differentiel et de calcul intégral*. Paris, France.

Lagrange, J. L. (1797). *Theorie des fonctions analityques*. Paris: Imprimeur Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins, No. 57.

Marcolini-Bernardi, J. M. (2003). *Ingeniería didáctica en física-matemática*. Tesis de doctorado, Universidad de Granada, España.

Núñez Espallargas, J. M., y Font Moll, V. (1995). Aspectos ideológicos en la contextualización de las matemáticas: una aproximación histórica. *Revista de Educación 30l6*, 239-314.

Rémizov, A. (1991). *Física médica y biológica*. Moscú, Rusia: Editorial Mir.

Resnick, L. B. (1983). Mathematics and science learning: A new conception. *Science 220*, 447-448.

Ruiz, L. (1994). *Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función: análisis epistemológico y didáctico*. Tesis de doctorado, Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Granada, España.

Sánchez-Pérez, E. A.; García Raffi, L. M., y Sánchez-Pérez, J. V. (1999). Introducción de las técnicas de modelización para el estudio de la física y de las matemáticas en los primeros cursos de las carreras técnicas. *Enseñanza de las Ciencias 17* (1), 119-129.

Steen, A. (1987). *Calculus for a new century: A pump, not a filter*. Washington, DC, EU: Mathematical Association of America [MAA Notes, 8].

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics 12* (2), 151-169.

Tipler, P. A. (1995). *Física*. Barcelona, España: Editorial Reverté.

Notas:

[1] Entendemos por *discurso matemático escolar* al discurso que marca el inicio de una enseñanza. No se reduce naturalmente a la organización temática de los contenidos ni a la profundidad expositiva, sino que se preocupa de la formación de consensos entre aquellos que forman parte de lo que se ha llamado en la literatura especializada como la *noosfera* (editores, autores, profesores, científicos, estudiantes, padres de familia, etcétera).

[2] Idea germinal: es el motor central en la construcción del conocimiento, a partir de la cual tanto procedimientos como significaciones se construyen paulatinamente y adquieren así su completa significación epistémica. (Cantoral, 1990 y 2001).

[3] La palabra *transponer* significa poner una cosa más allá, en un sitio distinto del lugar que ocupaba. El término *transposición didáctica* se refiere, así, en lo general, al proceso mediante el cual tiene lugar la acción de transponer un saber hacia un sitio didáctico, digámoslo así: llevar el saber al ámbito escolar (Cantoral, 1995, p. 60).

[4] La relación k/m es positiva y, por tanto, es razonable sustituirla por el cuadrado de cierta magnitud.

Josefina Marta Marcolini Bernardi
Departamento de Matemáticas
Área Matemática Aplicada
Universidad de Jaén, España

E-mail: mmarcoli@ujaen.es

F. Javier Perales Palacios
Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales
Facultad de Ciencias de la Educación
Universidad de Granada, España

E-mail: fperales@ugr.es

ANEXO

REVISIÓN DE TEXTOS ESCOLARES

Con el fin de analizar el tratamiento que los autores de textos escolares dan a los procedimiento, nociones, y conocimientos en un sentido amplio, hemos escogido unos textos, representativos de nuestro sistema educativo, y en ellos hemos seleccionado algunas variables de análisis a fin de apoyar nuestra revisión .

1. *Variables consideradas para la revisión de textos*

La revisión de textos se conforma a partir de las siguientes variables:

1. Características generales del texto:

a) Presentación
b) Notas históricas
c) Tecnología utilizada o propuesta (calculadora, ordenador, etc.)
d) Gráficos y figuras
e) Ubicación de los ejercicios y problemas propuestos (final de epígrafe, de capítulo, etc.).
f) Características especiales.

2. Organización de contenidos (bloques temáticos, lecciones, capítulos, etc.). Se consideraron los índices de contenidos de algunos de los textos utilizados, ya que en ellos se refleja la situación y relevancia que el autor da a los conceptos que estamos estudiando respecto de otros contenidos.

3. Estructura general del tema.

3.1. Secciones, Epígrafes, etc.

3.2. Ubicación y extensión que ocupa el tema en la exposición general del texto.

4. Tratamiento dado al tema
En los textos que aquí presentamos nos hemos centrado sobre **series de Taylor** y **movimientos**, observando lo siguiente:

4.1. Formas de introducirlo (a través de ejemplos, dando la definición, etc.)

4.2. Tipos de ejemplos:

a) Algorítmicos o de comprensión.
b) Marcos en los que se plantean (analítico, algebraico, gráfico, numérico)
c) Contextos en los que se sitúan (físico, matemático, biológico, etc.)

4.3. Tipos de ejercicios y problemas propuestos al final de la sección (las mismas consideraciones que en 4.2)

4.4. Tipos de ejercicios y problemas propuestos al final del capítulo (las mismas consideraciones que en 4.2).

4.5. Cuestiones (ubicación donde se plantean, versan sobre contenidos teóricos o prácticos, conceptos matemáticos involucrados).

2. Revisión de textos escolares
2.1. TEXTOS DE MATEMÁTICAS DE NIVEL UNIVERSITARIO

GRANERO, F. (1990). “Cálculo”. Mc Graw-Hill.

1. <u>Características generales del texto</u>

a) Presentación: Consta de un sólo volumen con 736 páginas y tapas flexibles.

b) Notas históricas: En el prólogo hace una reseña histórica con la intención de que el lector tenga una visión panorámica del cálculo. Comienza con los orígenes del cálculo integral con Arquímedes (287-212 a. de C.) para hallar el área de figuras planas hasta llegar a nuestros días con la aplicación de la teoría de integración a la teoría de la probabilidad, medida de Haar, teoría espectral y análisis armónico.

c) Tecnología: No propone ejercicios ni problemas para utilizar tecnología como, por ejemplo, la informática.

d) Gráficos y figuras: Hay un numero limitado a lo largo del texto para ayudar a visualizar los conceptos.

e) Ubicación de los ejercicios y problemas: Respecto a los problemas, debemos destacar que al acabar cada una de las dos partes en que se divide el texto, propone varios con su solución. En la primera parte hay veinte problemas, en su mayoría originales, propuestos en exámenes de la Escuela Técnica Superior de Ingeniería. Sus características son similares a las de final de capitulo.

f) Características especiales: Presenta la bibliografía, considerando también libros de problemas. La estructura de los contenidos, es la menos frecuente en textos de este nivel, tratando en cada tema los conceptos para el caso de una variable y a continuación su extensión a dos o mas variables.

2. <u>Organización de contenidos</u>:

El libro está dividido en dos partes, con 28 capítulos en total. Conforman la primera parte los primeros 18 capítulos y la segunda los 8 capítulos restantes. Cada capítulo está dividido en temas y éstos a su vez en subtemas.

Los temas están expuestos en el siguiente orden:

1. Los números.
2. Potencia de conjuntos.
3. Espacios métricos.
4. Espacios topológicos.
5. El conjunto de los números complejos.
6. Sucesiones numéricas.
7. Series numéricas.
8. Suma de series.
9. Límites y continuidad de funciones.
10. Derivabilidad y diferenciabilidad de funciones.
11. Generalizaciones.
12. Funciones compuestas.

13. Funciones implícitas.
14. Cambio de variables.
15. Determinantes funcionales.
16. Funciones homogéneas.
17. Desarrollo en serie de funciones.
18. Extremos de funciones.
19. Curvas en el plano.
20. Representación y estudio de las funciones trigonométricas e hiperbólicas.
21. Integrales indefinidas.
22. Integrales definidas.
23. Generalización del concepto de integral definida según Riemann.
24. Integrales paramétricas.
25. Integrales Eulerianas.
26. Integrales numéricas.
27. Medida de conjuntos. Integral de Lebesgue.
28. Aplicaciones de la integral definida.

3. <u>Estructura general del tema</u>

El tema específico a revisar se presenta en el capítulo 17, con el siguiente itinerario didáctico:

17. DESARROLLOS EN SERIE DE FUNCIONES.

17.1. Presentación del problema en el caso de una variable.
17.2. Polinomio de Taylor de grado *n*.
17.3. Fórmula de Taylor Lagrange.
17.4. Forma diferencial de la fórmula de Taylor.
17.5. Fórmula de Mc Laurin.
17.6. Acotación del error cometido al tomar como valor de $y = f(x)$ el polinomio de Taylor $p(x)$.
17.7. Desarrollo en serie de funciones de varias variables.
17.8. Desarrollos limitados de funciones.
17.9. Sucesión y serie de funciones. Convergencia y convergencia uniforme.
17.10. Series de potencias o series potenciales.

4. <u>Tratamiento dado al tema.</u>

El itinerario que sigue para la serie de Taylor es el siguiente:
Comienza diciendo: "*considérese una función y = f(x), que verifica unas ciertas condiciones, las cuales inmediatamente estudiaremos. La fórmula de Taylor es una generalización muy interesante del Teorema de los incrementos finitos, que permite expresar con una aproximación deseada el valor de f(x) mediante un polinomio p(x) que recibe el nombre de Polinomio de Taylor de grado n*".
Luego toma una función polinomial $f(x)$ de la forma,

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n;\ \ a_i \in \boldsymbol{R},$$

para demostrar que es posible expresarla como:

$$f(x) = b_0 + b_1(x\text{-}a) + b_2(x\text{-}a)^2 + ... + b_n(x\text{-}a)^n;\quad b_i,a \in \boldsymbol{R},$$

y que esta forma es única. Considerando a $f(x)$ como un vector del espacio vectorial sobre $\boldsymbol{R}$ de los polinomios de grado $\leq n$, y como la dimensión de dicho espacio es:
$n + 1$, siendo la base usual $(1, x, x^2, ..., x^n)$, se ve rápidamente que $(1, (x\text{-}a), (x\text{-}a)^2, ..., (x\text{-}a)^n)$ constituye también otra base, y por tanto que el vector $f(x)$ se puede expresar unívocamente en esta base.

A partir de aquí obtiene las coordenadas b_i en dicha referencia, con lo que llega a escribir el polinomio de Taylor de grado *n* de la forma:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Luego dice: "*Taylor lo generaliza a todo tipo de funciones que cumplan ciertas condiciones. Para ello sumó a su polinomio un término complementario, llamado resto (nulo si f(x) es polinomio), que mide el error cometido cuando se toma el polinomio de Taylor p(x) como valor de la función f(x)*".
Da a continuación las expresiones de los errores según Lagrange, Young y Cauchy. Más adelante presenta el Teorema de Taylor y la forma diferencial de la Fórmula de Taylor.

De acuerdo al itinerario dado más arriba, las series de potencias se desarrollan en el capítulo 17, en el tema 17.10, con los siguientes subtemas: Teorema de Abel relativo a la convergencia absoluta. Clasificación de las series potenciales. Cálculo del radio de convergencia de una serie potencial. Estudio de la convergencia uniforme de series potenciales mediante el criterio de suficiencia de Weierstrass. Teorema de Abel relativo a la convergencia uniforme de series potenciales. Operaciones con series de potencias. Diferentes formas de obtener el desarrollo en serie de potencias.

Los ejemplos y ejercicios propuestos al final del capitulo están planteados en un contexto analítico y son de tipo calculatorio, algunos enunciados tipo de los que aparecen son: "*Obtener el desarrollo en serie potencial de*… " , "*Hallar el desarrollo*… ".

LARSON, R., HOSTETLER, R. y EDWARDS, B. (1995).
"Cálculo y Geometría Analítica". McGraw-Hill.

1. <u>Características generales del texto</u>

a) Presentación: Consta de dos volúmenes, con tapas flexibles, de 770 paginas el primero y 576 el segundo.

b) Notas históricas: Presenta breves biografías de matemáticos ilustres con objeto, entre otras cosas, de mostrar la naturaleza de los problemas para cuya resolución fue inventado el Cálculo.

c) Tecnología: Utiliza recursos gráficos y programas de álgebra simbólica, tanto en el texto como en los ejercicios.

d) Gráficos: Contiene un buen número de ellos, generados por ordenador.

e) Ubicación de los ejercicios y problemas: Los capítulos están divididos en secciones, al final de cada sección se propone un buen número de ejercicios. Estos ejercicios tienen características muy similares a los presentados al final del capítulo. Entre ellos se incluyen de tipo calculatorio, de aplicaciones a la Física principalmente y a la Biología y Economía, y otros planteados desde un contexto gráfico. Dichos ejercicios están graduados según su dificultad; algunos requieren de calculadoras u ordenadores.

2. <u>Organización de contenidos</u>:

El primer volumen está conformado por los siguientes capítulos:

1. El plano cartesiano. Funciones.
2. Límites y sus propiedades.
3. Derivación.
4. Aplicaciones de la derivada.
5. Integración.
6. Aplicación de la integración.
7. Funciones logarítmicas y exponenciales.
8. Funciones trigonométricas y sus inversas.
9. Técnicas de integración. Integrales impropias.
10. Series infinitas.

Los siguientes capítulos están contenidos en el segundo volumen:

11. Cónicas.
12. Curvas en el plano, ecuaciones paramétricas y coordenadas polares.
13. Vectores y curvas en el plano.
14. Geometría analítica y vectores en el espacio.
15. Funciones de varias variables.
16. Integración múltiple.
17. Análisis vectorial.
18. Ecuaciones diferenciales.

3. Estructura general del tema

El tema que vamos a analizar es series de Taylor que se presenta en el capítulo 10 con el siguiente itinerario didáctico:

10.1. Sucesiones.
10.2. Series y convergencia.
10.3. El criterio integral y las p-series.
10.4. Comparación de series.
10.5. Series alternadas.
10-6. Los criterios del cociente y de la raíz.
10.7. Polinomios de Taylor y aproximación.
10.8. Series de potencias.
10.9. Representación de funciones por series de potencias.
10.10. Series de Taylor y de Maclaurin.

4. Tratamiento dado al tema

En la sección 10.7 se comienza presentando una imagen algebraica y gráfica de cómo ciertos polinomios se pueden utilizar para aproximar, en un punto y su entorno, otras funciones elementales. Para ello construye un polinomio de primer grado con la condición de que su valor y su pendiente coincidan con los de la función a aproximar en $x = 0$. El siguiente polinomio lo construye agregando a las condiciones anteriores una más, que los valores de la segunda derivada del polinomio y la función coincidan en $x = 0$. El polinomio de menor grado que satisface las tres condiciones conjuntamente aproxima mejor la función en el punto y su entorno.

El método se extiende a través del ejemplo a polinomios de tercer grado y por último se generaliza para hallar polinomios de grado n, en $x = c$, donde c es arbitrario.

A continuación se define el enésimo polinomio de Taylor y de Maclaurin.

A través de varios ejemplos va presentando los polinomios aproximantes, de diferente grado, para funciones elementales tales como las trigonométricas y logarítmicas. Incluye en algunos ejemplos tablas cuyos elementos se han hallado con calculadora gráfica y ordenador.

Define el resto según Lagrange y demuestra el Teorema de Taylor.

Las aplicaciones que presenta a este teorema son: determinar la precisión de una aproximación y aproximar un valor funcional con precisión prefijada.

Utiliza en esta sección, entre otros, el concepto de derivada sucesiva como herramienta.

Los ejercicios del final de la sección los podemos agrupar de la siguiente manera:

1-4: Hacer una correspondencia entre polinomios de Taylor de distintos grados, dados en un contexto analítico con su representación en un contexto gráfico.

5-20: Hallar polinomios de Taylor o Maclaurin.

21-24: Se trabaja en un contexto analítico determinando polinomios de distintos grados, luego se pide determinar tablas que permitan comparar los valores de la función en varios puntos con el de los polinomios de distintos grados en dichos puntos. También en el contexto gráfico se pide comparar la función y sus polinomios aproximantes.

25-28: Calculatorios.

31-34: Estos problemas están planteados para trabajar con el resto.

29,30,34-37: Proponen pequeñas demostraciones o cuestiones teóricas.
En la sección 10.10 trata sobre series de Taylor y de Maclaurin.

Como en secciones anteriores el autor abordó el tema de series de potencias, aquí comienza dando un teorema sobre la forma que debe tener una serie de potencias convergente. Indica que como los coeficientes de esta serie de potencias son precisamente los coeficientes de los polinomios de Taylor, la serie se llama serie de Taylor.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n = f(c)+f'(c)(x-c)+\cdots+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n+\cdots$$

En el primer ejemplo muestra cómo formar una serie de potencias y resalta el problema de la convergencia que, si bien es un punto sutil, es muy importante; para ilustrarlo da un ejemplo. En una nota hace hincapié en el resultado de un teorema que ha dado anteriormente que decía que si una serie de potencias converge a $f(x)$, la serie tiene que ser una serie de Taylor. El teorema NO dice que toda serie formada por los coeficientes de Taylor converja a $f(x)$. Se da el teorema que garantiza esa convergencia.

"*Si una función f tiene derivadas de todo orden en un intervalo I centrado en c, entonces la igualdad:*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

se cumple si y sólo si:

$$\text{lím}_{n\to\infty} R_n(x)=0$$

en todo x de I".

Hace un ejemplo para la función "sen *x*". En el contexto gráfico muestra tal convergencia utilizando los polinomios de Taylor. Además resalta cuál es la estrategia para hallar una serie de Taylor y da una lista con las series de potencias para varias funciones elementales, ya que ellas facilitan la deducción de una serie nueva. En el último ejemplo hace una aplicación: Utiliza una serie de potencias para aproximar el valor de una integral con un error menor a un valor prefijado.

Siguiendo la línea de los ejemplos presentados a lo largo del desarrollo, se muestran los ejercicios del final de la sección; éstos ponen claramente de manifiesto la jerarquía del concepto dentro de este curso.

En los ejercicios del 1-30 se pide hallar las series de Taylor o Maclaurin para diferentes funciones.
31-36, 53-56: Hay que hallar una aproximación polinómica de una función dada y representar ambas con el ordenador.

37-44: Mediante series de potencias se pide aproximar una integral.

57-58: Se sitúa en un contexto físico, dando la función que describe la trayectoria de un proyectil, pide rescribirla utilizando el desarrollo en serie.

Observamos que sobre el Polinomio de Taylor, básicamente los textos revisados siguen la misma secuencia. Primero señalan la importancia del mismo ya que permiten desarrollar a cierta clase de funciones como polinomios. Construyen el Polinomio y prueban el Teorema de Taylor, que en síntesis significa demostrar que es posible expresar una función con propiedades especiales, como la suma de un Polinomio de Taylor más un Resto. Ello se logra en la mayoría de los casos mediante una serie de artificios que, sin duda, restan naturalidad al desarrollo del tema.

En cuanto a la Serie de Taylor en los manuales de Cálculo se presenta como una parte del tema de convergencia de Series Infinitas, ya lo sea en el sentido de la aproximación en intervalos o en vecindades infinitesimales, o propiamente en el ámbito de la convergencia. Esta situación se caracteriza muy nítidamente cuando estudiamos el papel que se le asigna al Residuo de la serie de Taylor.

Debemos aclarar que el tema "Fórmula de Taylor", que aparece en los libros de COU se elimina de los programas de Enseñanza Secundaria en la Comunidad de Andalucía a comienzo de los años noventa.

2.2 REVISIÓN DE UN TEXTO DE FÍSICA DE NIVEL MEDIO

CANDEL, A.; SATOCA, J.; SOLER, J, B. y TENT, J. J. (1992). "Física y Química". Bachillerato 3 (BUP). Anaya.

1. <u>Características generales del texto</u>

a) Presentación: Se trata de un libro lleno de colorido con un buen numero de figuras, gráficos y diagramas. El texto se ha estructurado en nueve unidades; en cada unidad se distinguen tres partes:

1. Una doble página de presentación del tema.
2. Temas que se desarrollan en la unidad.
3. Práctica de laboratorio.

b) Notas históricas: Cada tema se cierra con una doble página denominada "complementos", donde se presentan breves notas históricas y bibliográficas sobre los temas y personajes más relevantes tratados en él. Además, en el mismo se ofrecen comentarios de textos científicos, libros comentados, prácticas sencillas, pasatiempos y ejercicios de mayor nivel.

c) Tecnología: Al final de cada unidad el autor propone una PRÁCTICA. En ella se describen todos los pasos a seguir y el material empleado, que en su mayoría es de tipo casero. No se proponen tareas en las que sea necesario el uso de calculadora u ordenador.

d) Gráficos: Los temas se ilustran a través de figuras y gráficos con mucho color.

e) Ubicación de los ejercicios y problemas: Hay un número elevado de ejercicios que se resuelven a través de cálculos después de aplicar las fórmulas correspondientes a los conceptos estudiados.

2. Organización de contenidos

Consta de 22 unidades que a su vez se dividen en temas, en total hay 23 temas.

3. Estructura general de los temas

Haremos una descripción de la primera unidad que es donde se desarrollan los temas de nuestro interés.

Unidad I. Cinemática.

Tema 1. Magnitudes cinemáticas.
- A qué llamamos vector.
- Operaciones básicas con vectores.
- ¿A qué llamamos movimientos? Sistema de referencia.
- A qué llamamos velocidad.
- ¿Qué es la aceleración?

Tema 2. Estudio del movimiento.
- Cuándo el movimiento es rectilíneo y uniforme.
- Cuándo el movimiento rectilíneo se acelera.
- Composición de movimientos.
- Movimiento armónico simple.
- Práctica.

4. Tratamiento dado a los temas

El primer tema comienza definiendo vector, operaciones básicas, momento de un vector respecto de un punto y derivada de un vector, esta última lo hace de la siguiente manera:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = lím_{\Delta t -> 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \cdots = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k}$$

Y a continuación se dan las reglas de derivación más importantes.

El desarrollo del resto de los temas se efectúa formalmente con la notación vectorial, siguiendo el orden previsto. Al definir la velocidad instantánea como $\vec{v} = lím_{\Delta t -> 0}\vec{v}_m$ dice: "*Este proceso es el cálculo de la derivada del vector posición con respecto al tiempo:* $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$".

En el ejemplo que sigue se pide calcular la velocidad media, módulo, velocidad instantánea dada la ecuación de movimiento de un objeto en forma vectorial. Luego se propone un ejercicio con los mismos ítems, donde la ecuación de movimiento está expresada a través de sus funciones componentes. Por último hay tres cuestiones.

Para el caso de la aceleración procede de la misma manera, concluyendo que, la aceleración es la derivada del vector velocidad y por tanto, resulta ser la segunda derivada respecto al tiempo del vector posición .El ejemplo siguiente consiste en calcular la aceleración media e instantánea y su módulo cuando se conoce la ecuación vectorial del movimiento. El ejercicio propuesto es igual, pero en este caso lo que se da son las componentes de la velocidad. Siguen dos cuestiones.

Los ejercicios de revisión están planteados desde un contexto físico siendo su resolución de tipo operatorio en la mayoría de los casos.

En el segundo tema se estudian los tipos de movimiento. Se revisan los gráficos posición-tiempo y velocidad-tiempo. El ejemplo que sigue es un caso de encuentro, a continuación se plantea un ejercicio y cuatro cuestiones. En la última cuestión se pide señalar el tipo de movimiento que corresponde a un gráfico posición-tiempo y velocidad-tiempo. Para el primer caso aparece una recta de pendiente negativa, para el segundo la recta es horizontal cortando al eje de las ordenadas en un valor negativo. Esta es la primera gráfica donde la velocidad es negativa.

Para el caso del movimiento rectilíneo acelerado, simplifica los cálculos haciendo coincidir uno de los ejes con la dirección del movimiento y siguiendo un tratamiento escalar del problema. Para determinar la ecuación del movimiento parte de la definición de aceleración $a = \frac{dv}{dt}$, que según dice se puede escribir como $dv = adt$. Se les presenta aquí un conflicto con lo estudiado en Cálculo, ya que en aquel se les dice que este cociente es una notación en su conjunto que no tiene sentido separarlo. Continúa diciendo *"integrando entre los instantes t_0 (en que la velocidad es v_0) y t (en que la velocidad es v), resulta: $v - v_0 = a.(t - t_0)$."*

Sigue el mismo camino a partir de la definición de velocidad: $v = \frac{d}{t}$.

Escribe *dr = v dt*, reemplaza *v* por la expresión obtenida anteriormente y dice *"integrando de nuevo entre los mismos límites, resulta r-r = v(t-t)+1/2 a(t-t)^2"*. Como *r*, *v*, y *a* tienen la misma dirección escribe la última ecuación en notación vectorial.

Los límites de integración aparecen un tanto súbitos, esto explicaría porqué los alumnos integran pero no consideran los límites de integración, ni hacen referencia a las condiciones iniciales del problema, todo esto carece de significación para ellos.

Revisa los gráficos posición-tiempo y velocidad-tiempo. En el primero presenta una parábola con vértice en el origen, que se abre hacia el eje positivo de las ordenadas.

En el segundo la recta tiene pendiente positiva con una ordenada al origen también positiva. Los gráficos presentan pocas variaciones.

El ejemplo siguiente es de encuentro para el caso del movimiento vertical. Propone luego, como ejercicio, lo mismo que el anterior pero ahora cambiando el sistema de referencia y llevándolo al punto desde donde se deja caer la segunda pelota. Se dan cinco ejercicios más. El último presenta, en un gráfico posición tiempo, una parábola con eje paralelo al de ordenadas, con vértice en un punto del primer cuadrante. que se abre hacia los valores negativos del eje de ordenadas. El segundo gráfico es velocidad-tiempo y en él se dibuja un segmento de recta con pendiente negativa que va desde (0, *v*) hasta (*t*, -*v*); se pide describir el movimiento e indicar un movimiento real que corresponda con estos gráficos.

Continúa con composición de movimientos y, por último, con el *movimiento armónico simple*. Este movimiento queda claramente ilustrado, en el texto, por una figura que muestra un objeto colgado de un muelle que oscila alrededor de la posición de equilibrio al separarlo de ésta y dejarlo en libertad. Destaca una característica de este movimiento y es que *"la aceleración del mismo no es constante"*. Para hallar la ecuación de movimiento utiliza, como recurso, el movimiento circular uniforme, con lo que llega a determinar que la ecuación de movimiento de un objeto, que describe un movimiento armónico simple de periodo T y amplitud A, tiene como expresión:

$$y = A \text{ sen } \left(\frac{2\pi}{T} t\right)$$

La velocidad y la aceleración la obtiene derivando.

Destacamos que una vez que ha conseguido la fórmula muestra la gráfica correspondiente.

En el ejemplo que sigue se dan los valores de la amplitud, el periodo y la posición del objeto en el instante inicial y con ello se pide determinar:

a) La ecuación de movimiento.
b) La posición que ocupará el objeto transcurridos 10 s. desde que se inició la oscilación.
c) La velocidad y la aceleración en ese instante.
d) Demostrar que la máxima velocidad se alcanza cuando el móvil pasa por la posición de equilibrio.

En el problema que plantea a continuación, conocida la ecuación de movimiento, pide que se determine la amplitud, periodo, frecuencia, posición inicial del objeto y punto en que la aceleración es máxima.

También se plantea una cuestión: demostrar que la velocidad es nula en los puntos en que la elongación es máxima.

Aquí se observa, de forma evidente, la falta de utilización del recurso gráfico, sobre todo en el planteo de ejercicios y problemas.

Los ejercicios de revisión son doce y están planteados desde el mismo contexto que los ejemplos. Su resolución gira en torno a la aplicación de las fórmulas.

Para concluir podemos decir que en la revisión de los textos de matemáticas se nota que el razonamiento que se sigue ciertamente enriquece la matemática como estructura científica, pero el discurso educativo se ve empobrecido.