EXTRACTA MATHEMATICAE Vol. **16**, Núm. 1, 79 – 82 (2001)

Sur Certaines Questions Concernant les Q-algèbres

R. Choukri

E.N.S. Takaddoum, Départament de Mathématiques, B.P. 5118, *Rabat* 10105, *Maroc*

(Research paper presented by José E. Galé)

AMS *Subject Class.* (2000): 46J05, 46J20 *Received July* 28, 1999

1. Introduction

On sait qu'une algèbre normée commutative unitaire A est une Q-algèbre si, et seulement si, ses idéaux maximaux sont fermés. Dans ce cas, de tels idéaux sont de codimension 1, i.e., les noyaux des caractères non nuls de A. D'où la question de savoir si A est une Q-algèbre dans le cas où tous ses caractères sont continus. Cette même question est posée par A. Beddaa dans ([1], question 1, p.265). Celui ci donne une réponse affirmative à la question dans le cas particulier où le spectre de tout élément x de A est égal à l'ensemble des $\chi(x)$, avec χ décrit la famille des caractères non nuls de A ([1], proposition 2.2, p.265). Nous donnons un exemple d'une algèbre normée commutative unitaire dans laquelle tout caractère est continu et qui n'est pas une Q-algèbre. Par ailleurs, il est bien connu qu'une a.l.m.c. de Fréchet commutative unitaire est une Q-algèbre si, et seulement si, tous ses idéaux maximaux sont fermés ([5], corollaire 3, p.296). Contrairement au cas normé, le résultat ci-dessus n'est pas nécessairement valide sans la complétude. Ceci est l'objet du deuxième exemple de cette note. Enfin, on sait qu'une algèbre localement A-convexe tonnelée est m-convexe ([3], proposition 4.3, p.18). En particulier, une algèbre A-normée tonnelée est normée. Et par conséquent, une algèbre A-normée complète est en fait une algèbre de Banach. Ce dernier résultat nous amene à poser la question suivante : Est ce qu'une Q-algèbre A-normée est nécessairement normée ?. La réponse est négative comme le montre le troisième exemple de cette note.

2. Préliminaires

Toutes les algèbres considérées sont supposées complexes et commutatives. Le radical de Jacobson d'une algèbre A, noté rad$\,(A)$, est l'intersection de ses idéaux réguliers maximaux. L'algèbre A est dite semi-simple (resp. radicale) si $\operatorname{rad}(A) = \{0\}$ (resp. $\operatorname{rad}(A) = A$). Le radical de Gelfand de A, noté J_A, est l'intersection de ses idéaux maximaux de codimension 1. En général, ces deux radicaux sont distincts (voir [1], théorème 1.2, p.264). Ils coincident dans certains cas topologiques, notamment celui des Q-algèbres normées. Soit τ une topologie d'algèbre sur A. On dit que (A, τ), ou tout simplement A, est fontionnellement continue si tous ses caractères sont continus. Une A-semi-norme (resp. A-norme) sur A est une semi-norme (resp. norme) d'espace vectoriel pour laquelle le produit est séparement continu. Une algèbre topologique dont la topologie est définie par une A-norme est dite algèbre A-normée. Une algèbre topologique est dite localement A-convexe si sa topologie peut être définie par une famille de A-semi-normes. Une algèbre topologique est dite m-convexe si sa topologie peut être définie par une famille de semi-normes sous-multiplivatives.

3. Exemples

3.1. Algèbre normée fonctionnellement continue et qui n'est pas une Q-algèbre. Soit A une algèbre normée unitaire semi-simple dont le radical de Gelfand J_A n'est pas nul (voir [1] , théorème 1.2, p.264). Considérons l'algèbre $B = J_A + Ce$, où e est l'unité de A. Notons par χ_0 le caractère de B dont le noyau est l'idéal J_A. Alors χ_0 est l'unique caractère non nul de B. En effet, soit χ un caractère non nul de A autre que χ_0. Il existe $a \in J_A$ tel que $\chi(a) = 1$. Pour tout $x \in A$, posons $\chi'(x) = \chi(ax)$. Il est facile de montrer que χ' est un caractère de A. De plus, on a $\chi'(a) = \chi(a^2) = 1$; ce qui est en contradiction avec la définition de J_A. Par ailleurs, l'algèbre B est fonctionnellement continue. En effet, soit χ un caractère non nul de l'algèbre complétée de B. Par ce qui précéde, la restriction de χ à B, evidemment non nulle, est égale à χ_0. D'où la continuité de χ_0. Montrons que B n'est pas une Q-algèbre. Supposons que ce n'est pas le cas. Alors, moyennant le théorème de Gelfand-Mazur, J_A est l'unique idéal maximal de B. Donc $\operatorname{rad}(B) = J_A$. Or d'après, ([2] , corollaire 20, p.126), on a $\operatorname{rad}(B) = \operatorname{rad}(A) \cap J_A = \{0\}$. Il en résulte que $J_A = \{0\}$; ce qui n'est pas le cas.

Remarque. En considérant l'algèbre normée produit $B \times C[0, 1]$, où $C[0, 1]$ est l'algèbre de Banach des fonctions complexes continues définies sur l'intervalle [0,1], nous obtenons une algèbre admettant une infinité de caractères, qui est fonctionnellement continue et qui n'est pas une Q-algèbre.

3.2. Algèbre m-convexe metrisable dans laquelle tous les idéaux maximaux sont fermés et qui n'est pas une Q-algèbre. Soit A l'algèbre des fractions rationnelles à coefficients complexes qui s'écrivent $P(X)/Q(X)$, avec $Q(n) \neq 0$, pour tout entier naturel n. Considérons la famille des semi-normes $(p_n)_n$, sous-multiplicatives, définie sur A par : $p_n(x) = |x(n)|$, pour tout $x \in A$ et pour tout n. L'algèbre A devient ainsi une algèbre m-convexe metrisable. Par des techniques algébriques élémentaires, on montre que les idéaux maximaux de A sont les $(X - n)A$, où $n \in \mathbb{N}$ (en fait, tout idéal de A est principal). Ce sont donc les noyaux des semi-normes p_n; et par conséquent, ils sont fermés. Cependant, A n'est pas une Q-algèbre puisque le spectre de X, qui est égal à $\mathbb{N}$, n'est pas borné.

Remarque. L'algèbre $\widetilde{A}$, complétée de l'algèbre A considérée dans l'exemple précédent, n'est pas une Q-algèbre. En effet, le spectre de X dans A est égal à l'ensemble $\{\chi_n(X), n \in \mathbb{N}\}$, où χ_n est le caractère continu défini sur A par : $\chi_n(x) = x(n)$. Ces caractères se prolongent en des caractères de $\widetilde{A}$. Il en résulte que le spectre de X dans $\widetilde{A}$ n'est pas borné ; et par suite $\widetilde{A}$ n'est pas une Q-algèbre.

3.3. Une Q-algèbre A-normée et qui n'est pas normée. Soit $(A, \| \|)$ une algèbre de Banach commutative radicale intègre et admettant une unité approchée bornée séquentielle $(e_n)_n$ (e.g. L'algèbre $L^1[0,1]$ munie du produit de convolution). D'après ([2], corollaire 12, p.62), il existe $a \in A$ et une suite $(u_n)_n$ tel que $e_n = au_n$, pour tout n. Il s'en suit que l'idéal aA est dense dans A. Considérons l'algèbre $B = aA$ munie de la norme d'espace vectoriel suivante : $\|x\|' = \|ax\|$, pour tout $x \in B$. Il est facile de montrer que B est ainsi A-normée. L'algèbre B n'est pas normée. Car, sinon, il existerait $K > 0$, tel que $\|xy\|' \leq K\|x\|'\|y\|'$, pour tous $x, y \in B$. Ainsi, on a $\|axy\| \leq K\|ax\|\|ay\|$, pour tous $x, y \in B$. Par ailleurs, a^2A est dense dans A puisque aA l'est. Donc $\|zy\| \leq K\|z\|\|ay\|$, pour tous $z \in A$ et $y \in B$. Et par conséquent, on a $\|y\| \leq KK'\|ay\|$, pour tout $y \in B$, où $K' = \sup\{\|e_n\|, n \geq 0\}$. Par la densité de aA dans A, nous aurons $\|x\| \leq KK'\|ax\|$, pour tout $x \in A$. Donc aA et A sont homéomorphes. Il en résulte que aA est fermé dans A. D'où $aA = A$, vu sa densité. Soit $u \in A$ tel que $au = a$. On a donc $axu = ax$, pour tout $x \in A$. L'algèbre A est alors unitaire d'unité u; ce qui est contradictoire puisqu'elle est radicale. Considérons maintenant l'algèbre B^1 obtenue par adjonction d'une unité à B. C'est une algèbre A-normée et qui n'est pas normée. Par ailleurs, l'algèbre B est radicale puisque A l'est. Donc B^1 est une Q -algèbre. Ainsi, l'algèbre B^1 est l'exemple cherché.

Remarque. Dans l'algèbre de l'exemple précédent, l'inverse n'est pas continu. Sinon, par un résultat de Turpin ([4], théorème, p. 1686), A sera à produit continu et par suite elle sera normée.

Remerciements

L'auteur remercie vivement le Professeur M. Oudadess pour ses remarques et discussions lors de la préparation de cette note.

Références

[1] Beddaa, A., Sur l'expression du radical et du spectre dans une algèbre normée non complète, *Extracta Math.* **11** (2) (1996), 261 – 267.

[2] Bonsall, F.F., Duncan, J., "Complete Normed Algebras", Springer-Verlag, New- York, 1973.

[3] Michael, E.A., "Locally multiplicatively convex topological algebras", Memoirs of A.M.S. 11, Providence, R.I., 1952.

[4] Turpin, P., Une remarque sur les algèbres à inverse continu, *C.R. Acad. Sc. Paris* **270** (22 juin 1970).

[5] Zelazko, W., On maximal ideals in commutative m-convex algebras, *Studia Math.* **LVIII** (1976), 290 – 298.