EXTRACTA MATHEMATICAE Vol. **13**, Núm. 3, 289 – 294 (1998)

Extension d'un Théorème de von Neumann dans les a^*-Algèbres

A. El Kinani

Ecole Normale Supérieure, B.P. 5118-*Takaddoum,* 10105-*Rabat, Maroc*

(Research paper presented by J. Galé)

AMS *Subject Class.* (1991): 46K99, 46H30 *Received April* 13, 1998

Introduction

Dans [5], nous avons établi que les algèbres hermitiennes constituent le cadre naturel des résultats de Ky Fan [7], sur les fonctions analytiques de contractions propres. Pour ce faire, nous avons utilisé le calcul fonctionnel étudié dans [1]. Dans cette note, nous ne considérons que les algèbres de Banach munies d'une B^*-semi-norme. Ces dernières sont caractérisées par le fait que la semi-norme sous multiplicative de Palmer [9] est non nulle. Nous montrons, entre autre (théorème 2.1), que $p(f(x)) < 1$ pour tout $x \in A$ tel que $\max(\rho(x), p(x)) < 1$ (où ρ désigne le rayon spectral) et toute fonction f holomorphe sur le disque unité D telle que $|f(z)| < 1$ pour tout $z \in D$. Puis, nous établissons les extensions du lemme de Schwarz et du théorème de Pick. Enfin, comme dans [8], nous exploitons l'analogue du théorème de Pick, pour améliorer le théorème 2.1, en exhibant un majorant de $p(f(x))$ plus petit que 1.

1. Préliminaires

Soit $(A, \|\cdot\|)$ une algèbre de Banach complexe unitaire munie d'une involution $x \mapsto x^*$. Pour $a \in A$, on définit la partie réelle de a notée $\operatorname{Re} a$ par $\operatorname{Re} a = \frac{1}{2}(a + a^*)$. Une forme linéaire l sur A est dite positive si $l(aa^*) \geq 0$ pour tout $a \in A$. On appelle état sur A une forme positive l sur A telle que $l(e) = 1$. On désigne par F (resp., $S(A)$) l'ensemble des formes positives (resp., des états) sur A. Rappelons qu'une B^*-semi-norme, sur A, est une semi-norme q sous multiplicative vérifiant $q(xx^*) = q(x)^2$, pour tout $x \in A$. L'ensemble des B^*-semi-normes sur A sera noté $bs(A)$. Une a^*-algèbre est une algèbre de Banach involutive qui admet une B^*-semi-norme non nulle. Dans le cas où A est munie d'une B^*-norme, nous retrouvons les A^*-algèbres de [2]. Une algèbre de Banach involutive est dite hermitienne si le spectre de tout élément hermitien est réel ([10]). Pour deux éléments hermitiens h et k de A, nous noterons $h \geq k$, si $h - k$ est positif, i.e., $Sp(h-k) \subset \mathbb{R}_+$. Si de plus $h - k$ est inversible, on écrira $h > k$. Pour $x \in A$, $|x|$ désignera la quantité $\rho(x^*x)^{1/2}$. Soit U l'ensemble des éléments unitaires de A. On désigne par p la semi-norme de Palmer [9] donnée par $p(x) = \inf \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|$ pour toutes les décompositions $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$, $\lambda_i \in C$ et $u_i \in U$.

Nous nous intéressons aux fonctions harmoniques et holomorphes telles qu'elles sont définies dans [3]. Soit Ω un ouvert de C. On désigne par $h(\Omega)$ (resp., $H(\Omega)$) l'ensemble des fonctions harmoniques (resp., holomorphes) sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{C}$. Soit A une algèbre de Banach complexe unitaire à involution continue, Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, z_0 un élément de Ω tel que $\overline{D(z_0,R)} \subset \Omega$, $R > 0$, $x \in A$ avec $Spx \subset D(z_0,R)$ et $f \in h(\Omega)$. Alors $f(x)$ est l'élément de A donné par la formule intégrale de Poisson ([1],[5]):

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{|z-z_0|=R} f(z)\,\mathrm{Re}\,[(ze + x - 2z_0e)(ze - x)^{-1}]\frac{|dz|}{R} \tag{1}$$

Rappelons que l'application $f \mapsto f(x)$ est un homomorphisme involutif d'espaces vectoriels et si $f \in H(\Omega)$, l'expression de $f(x)$ coïncide avec celle donnée par le calcul fonctionnel holomorphe classique ([1]).

Dans toute la suite, z est un abus de notation pour ze où $z \in \mathbb{C}$ et e est l'unité de A; et $\delta(x)$ désignera la quantité $\max(\rho(x), p(x))$, pour tout $x \in A$.

2. Extension d'un théorème de von Neumann dans les a^*-algèbres

Dans [5], nous avons montré que les algèbres hermitiennes constituent le cadre naturel des résultats de Ky Fan sur les fonctions analytiques de contractions ([7]). Dans cette section, nous étendons les résultats de [5] aux a^*-algèbres.

On considère

$$B(D) = \{f \in H(D) \colon |f(z)| < 1,\ \forall z \in D\}$$
$$P(D) = \{g \in H(D) \colon \mathrm{Re}\, g(z) > 0,\ \forall z \in D\}.$$

On obtient:

THÉORÈME 2.1. *Soit A une a^*-algèbre unitaire et $x \in A$ tel que $\delta(x) < 1$. Alors*

(i) $\inf\{l(\operatorname{Re} g(x)) \colon l \in S(A)\} > 0$, $\forall g \in P(D)$.

(ii) $p(f(x)) < 1$, $\forall f \in B(D)$.

Preuve. Montrons tout d'abord que, dans une a^*-algèbre unitaire A, on a $p(a) = \sup\{l(a^*a)^{1/2} \colon l \in S(A)\}$, pour tout $a \in A$. En effet, par [2, p. 217], on a

$$\sup\{q(a) \colon q \in bs(A)\} = \sup\{l(a^*a)^{1/2} \colon l \in S(A)\}.$$

Comme $p \in bs(A)$ ([9]), on a $p(a) \leq \sup\{l(a^*a)^{1/2} \colon l \in S(A)\}$. Pour l'autre inégalité, soient $l \in S(A)$ et $a = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$, $\lambda_i \in \mathbb{C}$ et $u_i \in U$, une décomposition quelconque de a. Alors $0 \leq l(a^*a) \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|\right)^2$. Par conséquent $l(a^*a) \leq p(a)^2$.

En utilisant l'égalité $p(f(x)) = \sup\{l(f(x)^* f(x))^{1/2} \colon l \in S(A)\}$, on montre, comme dans [5], que les deux assertions du théorème sont équivalentes. Montrons maintenant (i). Remarquons d'abord que $g(x)$ est définie car $\rho(x) \leq \delta(x) < 1$. Ensuite soient r et r' tels que $\delta(x) < r < r' < 1$. Alors il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $z \in \overline{D(0,r')}$, $\operatorname{Re} g(z) > \alpha$. Soient h la fonction définie, sur $D(0,r')$, par $h(z) = \operatorname{Re} g(z) - \alpha$. Alors $h \in h(D(0,r'))$ et, par (1), on a:

$$h(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=r} h(z) \operatorname{Re}\left[(z+x)(z-x)^{-1}\right] \frac{|dz|}{r}.$$

Pour tout $|z| = r$, on a $\operatorname{Re}\left[(z+x)(z-x)^{-1}\right] = (\bar{z}-x^*)^{-1}(r^2 - x^*x)(z-x)^{-1}$. Soit maintenant $l \in S(A)$. Alors l est continue et la forme linéaire l_z définie, sur A, par $l_z(a) = h(z) l([(\bar{z}-x^*)^{-1} a (z-x)^{-1}])$ est positive non nulle et donc $l_z(e) > 0$. Comme la forme linéaire $x \mapsto \frac{l_z(x)}{l_z(e)}$ est dans $S(A)$, on a $l_z(x^*x) \leq l_z(e) p(x)^2$ vu que $p(x) = \sup\{l(x^*x)^{1/2} \colon l \in S(A)\}$. D'où $l_z(x^*x) \leq l_z(e)\delta(x)^2 \leq l_z(e) r^2$. Par conséquent $l_z(r^2 - x^*x) \geq 0$ pour tout $|z| = r$. D'où $l(h(x)) \geq 0$ car $l(h(x)) = \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=r} l_z(r^2 - x^*x) \frac{|dz|}{r}$. Finalement, puisque $h(x) = \operatorname{Re} g(x) - \alpha$, on obtient $l(\operatorname{Re} g(x)) \geq \alpha$. ∎

Remarque 2.2. Dans le cas où l'algèbre est hermitienne, on a $|x| = \sup\{l(x^*x)^{\frac{1}{2}} \colon l \in S(A)\}$ et $\rho(x) \leq |x|$ d'aprés [10]. Donc, par [2, p. 217], $p = |\ |$. Par conséquent $\delta(x) = |x|$. Ensuite, d'aprés le lemme 2.3 ([6]) et le théorème 2.1, $Sp \operatorname{Re} g(x) \subset]0, +\infty[$ pour tout $g \in P(D)$ et $|x| < 1$. D'où $\operatorname{Re} g(x) > 0$. De plus $|f(x)| < 1$ pour tout $f \in B(D)$ vu que $p = |\ |$ dans ce cas. Ainsi obtient-on le théorème 3.1. de [5].

En apliquant le théorème 2.1 et les preuves de [5] et [6], on montre les théorèmes suivants:

THÉORÈME 2.3. *Soit A une a^*-algèbre unitaire, $x \in A$ tel que $\delta(x) \leq 1$ et Ω un voisinage de D. Alors $p(f(x)) \leq 1$ pour toute $f \in H(\Omega)$ telle que $|f(z)| \leq 1$ pour tout $z \in D$.*

THÉORÈME 2.4. *Soit A une a^*-algèbre unitaire et $f \in H(D)$. Pour $0 < r < 1$, on pose $M(r) = \max\{|f(z)|\colon |z| = r\}$. Alors $M(r) = \max\{p(f(x))\colon \delta(x) \leq r\}$, où le maximun est pris sur l'ensemble des $x \in A$ tels que $\delta(x) \leq r$.*

Remarque 2.5. a) Le théorème 2.3 est une extension de l'analogue du théorème de von Neumann donné dans [5] et les théorème 2.4 est celle du théorème 3.2.2 de [5].

b) Comme dans [5], on montre que les théorèmes 2.1 et 2.3 sont équivalents.

Dans les a^*-algèbres, l'analogue du lemme de Schwarz est:

THÉORÈME 2.6. (Analogue du lemme de Schwarz) *Soit A une a^*-algèbre unitaire et $x \in A$ tel que $\delta(x) < 1$. Si f, g et h sont dans $H(D)$ tels que $f = gh$ et $|h(z)| \leq 1$ pour tout $z \in D$ et $l \in S(A)$. Alors*

$$l(g(x)^* g(x)) \geq l(f(x)^* f(x)), \tag{2}$$

$$p(g(x)) \geq p(f(x)). \tag{3}$$

Si h n'est pas une fonction constante de module 1, l'inégalité (2) est stricte si, et seulement si, $l(g(x)^* g(x)) > 0$. L'égalité est réalisée dans [3] si, et seulement si, $p(g(x)) = 0$.

Preuve. On utilise la technique de [5] avec le théorème 2.1 à la place du théorème 3.1 de [5]. ∎

Pour $z_0 \in D$, on désigne par μ_{z_0} la transformation de Möbius définie, sur D, par $\mu_{z_0}(z) = \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}$.

En utilisant le théorème 2.6 et la technique de [7], on montre le:

THÉORÈME 2.7. (Analogue du théorème de Pick) *Soit A une a^*-algèbre unitaire et $x \in A$ tel que $\delta(x) < 1$. Soit de plus $f \in B(D)$, $z_0 \in D$ et $l \in S(A)$. Alors*

$$l(\mu_{z_0}(x)^* \mu_{z_0}(x)) \geq l(\mu_{f(z_0)}(f(x))^* \mu_{f(z_0)}(f(x))), \tag{4}$$

$$p(\mu_{z_0}(x)) \geq p(\mu_{f(z_0)}(f(x))). \tag{5}$$

(4) *est stricte si, et seulement si,* $l[(x^* - \bar{z}_0)(x - z_0)] > 0$ *et* f *n'est pas de la forme*

$$f(z) = \varepsilon \mu_{z_1}(z) \text{ avec } |\varepsilon| = 1 \text{ et } z_1 \in D. \tag{6}$$

L'égalité est réalisée dans [5] *si, et seulement si,* $x = z_0$ *ou* f *n'est pas de la forme* (6).

Dans [8], Ky Fan a obtenu une amélioration de l'inegalité de von Neumann pour les fonctions de $H(D)$ en exhibant un majorant entre $\|f(T)\|$ et 1. Dans les a^*-algèbres, nous améliorons le théorème 2.1 comme suit:

THÉORÈME 2.8. *Soit* A *une* a^**-algèbre unitaire et* $x \in A$ *tel que* $\delta(x) < 1$. *Soit de plus* $f \in B(D)$ *et* $z_0 \in D$. *Alors*

$$p(f(x)) \leq \frac{p(\mu_{z_0}(x)) + |f(z_0)|}{1 + p(\mu_{z_0}(x))|f(z_0)|} < 1. \tag{7}$$

Preuve. D'après le théorème 2.7, $p(\mu_{f(z_0)}(f(x))) \leq p(\mu_{z_0}(x))$. Par ailleurs, $\mu_{z_0} \in B(D)$. D'où, d'apres le théorème 2.1, $p(\mu_{z_0}(x)) < 1$. De plus $p(f(x)) < 1$ car $Sp\, f(x) = f(Spx)$. D'où la première inégalité de (7) car si $a \in A$ tel que $\rho(a) < 1$, $z \in D$ et $0 \leq \alpha < 1$, alors $p(a) \leq \frac{\alpha+|z|}{1+\alpha|z|}$ des que $p(\mu_z(a)) \leq \alpha$. Pour la deuxième, elle résulte du fait que $p(\mu_{z_0}(x)) < 1$ et $f(z_0) < 1$. ∎

Remarque 2.9. 1) Si on pose $z_0 = 0$, (7) s'écrit

$$p(f(x)) \leq \frac{p(x) + |f(0)|}{1 + p(x)|f(0)|} < 1. \tag{8}$$

2) Si de plus $f(0) = 0$, (8) devient

$$p(f(x)) \leq p(x). \tag{9}$$

Nous obtenons aussi une amélioration de (9) donnée par:

COROLLAIRE 2.10. *Soit* A *une* a^**-algèbre unitaire et* $x \in A$ *tel que* $\delta(x) < 1$. *Soit de plus* $f \in B(D)$ *telle que* $f(0) = 0$. *Alors*

$$p(f(x)) \leq \frac{p(x) + |f'(0)|}{1 + p(x)|f'(0)|} p(x). \tag{10}$$

Preuve. En excluant le cas trivial où f est une fonction de la forme $f(z) = \eta z$ avec $|\eta| = 1$, on a $g \in B(D)$ où $g(z) = z^{-1}f(z)$ si $z \neq 0$ et $g(0) = f'(0)$. De plus $g(x)x = f(x)$. Et on conclut par le théorème 3.8. ∎

Nous terminons cette note par un exemple de a^*-algèbre qui n'est pas hermitienne.

Prenons C^2 muni de l'involution $(u,v)^* = (\bar{v}, \bar{u})$ et soit p_1 définie sur C^2 par $p_1(u,v) = u$. Alors p_1 est non positive car $p_1[(1,i)(1,i)^*] = p_1[(1,i)(-i,1)] = p_1((-i,i)) = -i$. Soit maintenant A une algèbre hermitienne unitaire quelconque. On pose $B = A \times C^2$ munie des opérations usuelles, de la norme $\|(x,y)\| = \max(\|x\|, \|y\|)$ et de l'involution $(x,y)^* = (x^*, y^*)$. Alors B est non hermitienne car l'application ϕ définie de B dans C par $\phi[(a,(u,v))] = p_1[(u,v)] = u$ est un caratère non hermitien; en effet, si $h = h^*$ dans A, on a $\phi[(h,(i,-i))^*] = \phi[(h,(i,-i))] = i$ et $\overline{\phi[(h,-i,-i)]} = -i$. Montrons maintenant que B est une a^*-algèbre. Pour cela, soit $g \in S(A)$. Alors la forme positive φ sur B donnée par $\varphi(a,(u,v)) = g(a)$ est non nulle. D'où $S(A) \neq \emptyset$ et par conséquent $p \neq 0$.

Références

[1] Akkar, M., El Kinani, A., Oudadess, M., Calculs fonctionnels harmonique et analytique réel, *Ann. Soc. Math. Québèc,* **12** (2) (1988), 151–169.

[2] Bonsall, F.F., Duncan, J., "Complete Normed Algebras", Springer-Verlag, New York, 1973.

[3] Cartan, H., "Théorie Élémentaire des Fonctions Analytiques d'une ou Plusieurs Variables Complexes", Hermann, Paris, 1963.

[4] Dixmier, J., "Les C^*-Algèbres et leurs Représentations", Gauthiers Villars, Paris, 1969.

[5] El Kinani, A., Holomorphic functions operating in hermitian Banach algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.,* **111** (4) (1991), 931–939.

[6] El Kinani, A., Spectral sets in hermitian algebras, *Bull. U.M.I.,* **7** (7-A) (1993), 253–258.

[7] Fan, K., Analytic functions of proper contraction, *Math. Zeitschrift,* **160** (1978), 275–290.

[8] Fan, K., Sharpened forms of an inequality of von Neumann, *Math. Zeitschrift,* **194** (1987), 7–13.

[9] Palmer, T.W., The Gelfand-Naïmark pseudo-norm on Banach *-algebras, *J. London Math. Soc.,* **3** (2) (1971), 59–66.

[10] Ptak, V., Banach algebras with involution, *Manuscripta Math.,* **6** (1972), 245–290.