EXTRACTA MATHEMATICAE Vol. **13**, Núm. 1, 125 – 129 (1998)

Théorème d'Existence et d'Unicité pour un Système d'Équations aux Dérivées Partielles Non-linéaire

JIRUNG ALBERT SHIH

Departamento de Álgebra, Geometría y Topología, Facultad de Ciencias, Universidad de Valladolid, 47005 - *Valladolid, Spain*

(Research paper presented by M. de León)

AMS *Subject Class.* (1991): 58G99, 35A07 *Received July* 10, 1996

Dans ce travail, toutes les variétés et applications sont supposées être analytiques réelles. Soient V et Z deux variétés, la dimension de V étant $n \geq 2$. Pour tout entier $k \geq -1$, on désignera par $J^k(V,Z)$ l'espace des k-jets d'Ehresmann (par définition $J^{-1}(V,Z) = V$). Pour $k' > k$, notons $\alpha_k^{k'} : J^{k'}(V,Z) \longrightarrow J^k(V,Z)$ la projection canonique, ou plus simplement α. Désignons par $\mathcal{I}_k$ l'idéal de Cartan-Ehresmann dans l'algèbre des formes différentielles de $J^k(V,Z)$ et, rappelons qu'une application γ d'une variété Σ dans $J^k(V,Z)$ est dite intégrable si $\gamma^\star(\mathcal{I}_k) = 0$. Soit $G_{n-1}(TJ^k(V,Z))$ l'espace fibré des variétés grassmanniennes des $(n$–$1)$–plans associé à l'espace tangent de $J^k(V,Z)$ et considérons la sous–variété $G^\star_{n-1}(TJ^k(V,Z))$ formée par les $(n$–$1)$–plans τ qui se projettent en un $(n$–$1)$–plan de TV par la dérivée de α^k_{-1}. Alors les projections canoniques $\alpha_k^{k'}$ induisent des applications:

$$\alpha_k^{k'} : G^\star_{n-1}(TJ^{k'}(V,Z)) \longrightarrow G^\star_{n-1}(TJ^k(V,Z)) \qquad \text{pour } k' > k \geq -1.$$

Par souci de simplicité, nous les noterons dorénavant α. Étant données deux variétés X et Y, telles que $\dim X = l < \dim Y$ et un plongement $\gamma : X \longrightarrow Y$, notons $\tilde{\gamma} \colon X \longrightarrow G_l(TY)$ l'application qui associe à chaque point x de X l'image par la dérivée de γ de l'espace tangent T_xX.

Soient V et Z deux variétés. La donnée de $D \subseteq J^{k_0}(V,Z)$ nous permet de définir pour tout i, par saturation, un sous-ensemble D_i de $J^i(V,Z)$; on dit que D est un système analytique si D_{k_0} est un ensemble semi-analytique. Les D_i forment une suite appelée gradué associé de D; cela nous permet de définir le sous-espace $E_{n-1,k_0-1}(D) = (G_{n-1}(TD_{k_0-1}) \times D_{k_0}) \cap E_{n-1,k_0-1}(V,Z)$ de la variété $E_{n-1,k_0-1}(V,Z)$ qui a été défini dans [4]. Rappelons qu'il a aussi été défini un espace $W_{n-1,k}(V,Z)$, une projection $p : E_{n-1,k}(V,Z) \longrightarrow W_{n-1,k}(V,Z)$ et enfin une application $\Psi_k : G_{n-1}(TV) \times J^{k+1}(V,Z) \longrightarrow E_{n-1,k}(V,Z)$.

DÉFINITION. Un point θ de $E_{n-1,k_0-1}(V,Z)$ est appelé *non-caractéristique* de D si $\theta \in E_{n-1,k_0-1}(D)$ et si la fibre $p^{-1}(p(\theta))$ dans $E_{n-1,k_0-1}(V,Z)$ coupe transversalement $E_{n-1,k_0-1}(D)$. On notera $C(D)$ l'ensemble des points caractéristiques de D.

Ceci étant, considérons une sous-variété Σ de codimension 1 dans V, notons $\sigma : \Sigma \longrightarrow V$ l'inclusion et choisissons un relèvement intégrable γ de σ dans $J^{k_0}(V,Z)$. Alors l'image de l'application

$$\Psi_{k_0-1} \circ (\widetilde{\alpha \circ \gamma} \times \gamma) : \Sigma \longrightarrow G^*_{n-1}(TJ^{k_0-1}(V,Z)) \underset{J^{k_0-1}(V,Z)}{\times} J^{k_0}(V,Z)$$

est contenue dans $E_{n-1,k_0-1}(V,Z)$. Ceci nous permet de poser :

DÉFINITION. La sous-variété Σ de codimension 1 dans V est dite *non-caractéristique* par rapport à γ pour le système $D \subseteq J^{k_0}(V,Z)$ si l'image de $\Psi_{k_0-1} \circ (\widetilde{\alpha \circ \gamma} \times \gamma)$ est contenue dans $E_{n-1,k_0-1}(V,Z) - C(D) \subseteq E_{n-1,k_0-1}(D)$.

Remarque. Les définitions restent valables lorsque σ est un plongement analytique.

THÉORÈME. *Soient V, Z et Σ trois variétés analytiques réelles, telles que $\dim V = n \geq 2$, $\dim \Sigma = n-1$, $\sigma : \Sigma \longrightarrow V$ un plongement, γ un relèvement intégrable de σ dans $J^{k_0}(V,Z)$ et $D \subseteq J^{k_0}(V,Z)$ un système analytique d'équations aux dérivées partielles. Supposons que Σ est non-caractéristique par rapport à γ pour D. Alors il existe un et un seul germe de solution analytique u de D définie dans un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de $\sigma(\Sigma)$, $u : \mathcal{V} \longrightarrow Z$, tel que $(j^{k_0}u) \circ \sigma = \gamma$.*

Rappelons que dans [2], pour définir la notion de sous-variété non-caractéristique pour un système d'équations fortement non-linéaire, il était nécessaire de supposer l'existence d'une solution.

Preuve. Désignons par $E^0_{n-1,k}(D)$ le sous-espace de $E_{n-1,k}(D)$ formé par les éléments θ où l'intersection $E_{n-1,k}(D) \cap p^{-1}(p(\theta))$ dans $E_{n-1,k}(V,Z)$ est transversale, par $W^0_{n-1,k}(D)$ l'image par p de $E^0_{n-1,k}(D)$ et par

$$p_k : E^0_{n-1,k}(D) \longrightarrow W^0_{n-1,k}(D), \tag{1}$$

l'application induite par p, qui est bijective si $k \geq k_0$ ([7], [8]). La définition de non-caractéristique entraîne que

$$\Psi_{k_0-1} \circ (\widetilde{\alpha \circ \gamma} \times \gamma) : \Sigma \longrightarrow E^o_{n-1,k_0-1}(D) \subseteq G^\star(TD_{k_0-1}) \underset{J^{k_0-1}(V,Z)}{\times} D_{k_0}$$

c'est-à-dire

$$\pi_1 \circ \Psi_{k_0-1} \circ (\widetilde{\alpha \circ \gamma} \times \gamma)(\Sigma) \subseteq W^0_{n-1,k_0-1}(D), \quad \operatorname{Im} \gamma \subseteq D_{k_0},$$

où π_1 est la projection sur la première composante (π_2 sur la deuxième). Or l'application

$$\alpha : W_{n-1,k+1}(V,Z) \longrightarrow W_{n-1,k}(V,Z)$$

satisfait évidemment $\alpha \circ \widetilde{\gamma'} = \widetilde{\alpha \circ \gamma'}$ pour toute application intégrable $\gamma' : \Sigma \longrightarrow J^{k+1}(V,Z)$. Ainsi le fait $\alpha^{-1}(W^0_{n-1,k}(D)) = W^0_{n-1,k+1}(D)$ démontré dans [7] [8] entraîne

$$\operatorname{Im} \tilde{\gamma} \subseteq \alpha^{-1}(\operatorname{Im} \alpha \circ \tilde{\gamma}) = \alpha^{-1}(\operatorname{Im} \widetilde{\alpha \circ \gamma}) \subseteq \alpha^{-1}(W^0_{n-1,k-1}(D)) = W^0_{n-1,k_0}(D),$$

ce qui nous permet de définir d'aprés (1) l'application

$$\gamma_1 : \Sigma \xrightarrow{\tilde{\gamma}} W^0_{n-1,k_0}(D) \xrightarrow{p^{-1}_{k_0}} E^0_{n-1,k_0}(D) \xrightarrow{\pi_2} J^{k_0+1}(V,Z)$$

vérifiant $\operatorname{Im} \gamma_1 \subseteq D_{k_0+1}$ et $\alpha^{k_0+1}_{k_0} \circ \gamma_1 = \gamma$. Or γ est intégrable par hypothèse, $p^{-1}_{k_0} \circ \tilde{\gamma}$ est un relèvement de $\tilde{\gamma}$, d'où on déduit que γ_1 est aussi intégrable (Corollaire 1 de [6]). Ceci nous permet de recommencer ce raisonnement et de construire γ_2. De cette façon, on obtient par récurrence une suite d'applications γ_k toutes intégrables vérifiant $\alpha^k_{k-1} \circ \gamma_k = \gamma_{k-1}$, $\operatorname{Im} \gamma_k \subseteq D_k$ et $\operatorname{Im} \tilde{\gamma}_k \subseteq W^0_{n-1,k_0+k}(D)$. De plus, ces conditions déterminent de façon unique les γ_k à partir de γ. Pour un $y \in \Sigma$ la limite projective des $\gamma_k(y)$ s'identifie au développement au point $\sigma(y) \in V$ d'une solution formelle de D. Pour montrer la convergence de ce développement (qui est un problème local), remarquons qu'il suffit de le montrer à partir del'ordre $k_0 + 1$ c'est-à-dire $\gamma_1 : \Sigma \longrightarrow D_{k_0+1}$. Or $D_{k_0+1} \subseteq J^{k_0+1}(V,Z)$ est localement quasi-linéaire; alors l'équivalence de la notion de caractéristique que nous utilisons avec celle de Petrovskii nous permet de conclure. ▮

On se place directement à l'ordre k_0, l'image de l'application γ était incluse dans $J^{k_0}(V,Z)$: c'est la principale différence avec le problème de Cauchy qui se place à l'ordre $k_0 - 1$. En effet les données de Cauchy peuvent aussi être representées par un plongement analytique γ, mais dans ce cas, l'espace d'arrivée sera $J^{k_0-1}(V,Z)$. Lorsqu'on se donne des données de Cauchy dans $J^{k_0-1}(V,Z)$, on peut encore suivre le même raisonnement lorsque certaines conditions de transversalité sont vérifiées, mais dans le cas fortement non-linéaire nous n'aurons plus l'unicité de la solution [5]; la construction de la suite de relèvements intégrables dépendra du choix du premier relèvement parce que le p_{k_0-1} ne sera pas nécessairement bijective comme c'est le cas lorsque D est quasi-linéaire. C'est la principale différence entre l'approche par la notion de caractéristique et celle du problème de Cauchy bien posé pour la recherche de solution. Nous avons aussi une similitude pour la stabilité ("problème bien posé"). Dans le théorème, on peut introduire une topologie sur l'ensemble des (σ,γ) parce qu'il s'agit de plongement analytiques, alors l'existence de la solution correspondante est stable, c'est-à-dire qu'il existe un voisinage ouvert autour d'un (σ_0,γ_0) non caractéristique où tout les points sont non-caractéristiques.

Remarque. Le sous-ensemble D détermine canoniquement par intersection le sous-espace $E_{n-1,k_0-1}(D)$ de la variété $E_{n-1,k_0-1}(V,Z)$. Ainsi $E_{n-1,k_0-1}(D)$ est indépendante du choix d'un système de générateurs de l'idéal de définition de D comme dans l'écriture générale d'un système d'équations. Donc la définition de caractéristique proposée ici est automatiquement intrinsèque: un invariant indépendant du choix des représentants de l'ensemble D.

EXEMPLE. Considérons l'équation de la gravitation d'Einstein dans $\mathbb{R}^4$ d'inconnue une matrice réelle 4×4 symétrique inversible noté g; la donnée de cette matrice est équivalente à celle de dix fonctions g_{ij} alors

$$D \qquad \begin{cases} R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = K_{ij}(x, g_{\lambda\mu}, \partial_\nu g_{\lambda\mu}), \\ \det(g) \neq 0 \end{cases}$$

où R_{ij} (resp. R) est la courbure de Ricci (resp. scalaire) associée à g, et où les K_{ij} sont dix fonctions analytiques données de 54 variables. Ainsi $D \subseteq J^2(\mathbb{R}^4,\mathbb{R}^{10})$ est un système quasi–linéaire.

Commençons par le problème de non-caractéristique; soient $\sigma_0 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ le plongement défini par $x_0 = 0$, $x_1 = \xi_1$, $x_2 = \xi_2$ et $x_3 = \xi_3$ avec $\xi = (\xi_1,\xi_2,\xi_3) \in \mathbb{R}^3$ et γ un relèvement intégrable de σ_0, $\gamma : \mathbb{R}^3 \longrightarrow J^2(\mathbb{R}^4,\mathbb{R}^{10})$. Si nous représentons $J^2(\mathbb{R}^4,\mathbb{R}^{10})$ par $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^{10} \times \mathbb{R}^{40} \times \mathbb{R}^{100}$ nous pouvons alors écrire $\gamma(\xi) = (\sigma_0(\xi), u_{ij}(\xi), p_l^{ij}(\xi), \alpha_{\lambda\mu}^{ij}(\xi))$ avec $1 \le i \le j \le 4$, $1 \le l \le 4$, et $1 \le \lambda \le \mu \le 4$. Supposons maintenant que le mineur $(1,1)$ de la matrice symétrique $U = (u_{ij})$ définie grâce au dix fonctions u_{ij}, ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^3$; alors l'image de

$$\operatorname{Im} \Psi_{k_0-1} \circ (\widetilde{\alpha \circ \gamma} \times \gamma) \subseteq E_{n-1,k_0}(D) - C(D),$$

i.e. l'hyperplan $x_0 = 0$, est non-caractéristique par rapport à un tel γ.

Considérons maintenant le problème de Cauchy; soit un relèvement intégrable de σ_0

$$\gamma' : \mathbb{R}^3 \longrightarrow J^1(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^{10}) = \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^{10} \times \mathbb{R}^{40} / \gamma'(\xi) = (\sigma_0(\xi), u'_{ij}(\xi), p'^{ij}_l)$$

où le $(1,1)$–mineur de la matrice symétrique $U' = (u'_{ij})$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^3$. Alors il existe un et un seul relèvement intégrable de γ', noté $\gamma_0 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow J^2(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^{10})$, $\alpha \circ \gamma_0 = \gamma'$, tel que σ_0 soit non-caractéristique par rapport à γ_0. En particulier, le théorème montre que dans le cas où les K_{ij} sont des fonctions analytiques réelles, l'équation d'Einstein possède beaucoup de solutions analytiques semi–locales i.e. au voisinage de l'hyperplan $x_0 = 0$ (x_0 représente le temps). En effet une fois les fonctions u'_{ij} analytiques bien choisies, le choix des dix fonctions analytiques p'^{ij}_l est arbitraire.

Comme on n'utilise pas la méthode indiquée dans [1], la condition $K_{ij} = 0$ n'est pas nécessaire ici. De plus le développement de Taylor de la solution correspondant à γ_0 peut être explicitement donné.

Références

[1] Arnowitt, R., Deser, S., & Misner, C., Coordinate invariance and energy expressions in General Relativity, *Phys. Rev.,* **122** (1961), 997–1006.

[2] Petrovskii, I.G., "Partial Differential Equations", W.B. Saunders Compagny, Philadelphia, 1967.

[3] Shih, J.A., "Sur la Saturation et la Stabilité des Systèmes d'Équations aux Dérivées Partielles et le Calcul Formel "(Thèse), Paris, 1994.

[4] Shih, J.A., Sur la notion de caractéristique pour un système d'équations aux dérivées partielles non-linéaires, *C.R. Acad. Sci. Paris,* **320** (Série I) (1995), 965–968.

[5] Shih, J.A., Sur l'équation de Monge-Ampère, Seminario Iberamericano de Matemáticas, Tordesillas, (1996)

[6] Shih, J.E., Caractérisation axiomatique du système de Shih Wei-Shu, *C. R. Acad. Sci. Paris,* **319** (Série I) (1994), 1299–1302.

[7] Shih, W.H., "Solution Analytique de quelques Équations aux Dérivées Partielles en Mécanique des Fluides", Hermann, Paris, 1992.

[8] Shih, W., "Une Méthode élémentaire pour l'étude des Équations aux Dérivées Partielles", Diagrammes 16, Paris, 1986.