EXTRACTA MATHEMATICAE Vol. 10, Núm. 2, 119 – 129 (1995)

Mosco-Convergence de suites de fonctions DC et conditions d'optimalité du second ordre

T. Amahroq et A. Elhiali Alaoui

Faculté des Sciences et Techniques, B.P. 618, *Marrakech, Maroc*

(Presented by P.L. Papini)

AMS *Subject Class.* (1991): 58C05, 58C20 *Received March* 24, 1994

Dans ce travail, nous étudions la Mosco-épi-convergence d'une suite de fonctions DC. Ceci nous permet de calculer les Mosco-épi–dérivées (première et seconde) et de donner des conditions d'optimalité nécessaires et suffisantes pour un problème d'optimisation DC.

1. Introduction et rappels

Dans toute la suite de ce travail X désigne un espace de Banach réflexif. On rappelle qu'une suite de fonctions $(f_n)_n$ de X dans $\overline{\mathbb{R}}$ est dite Mosco-épi-convergente (ou Mosco convergente) vers une fonction f et on notera $M\_elm\ f_n = f$ si pour tout $x \in X$

$$w\_eli\ f_n(x) \geq f(x) \geq s\_els\ f_n(x)\,,$$

où $w\_eli\ \ f_n(x)$ est l'épi-limite inférieure séquentielle faible notée $\rightharpoonup$ et $s\_els\ f_n(x)$ désigne l'épi-limite supérieure forte. Rappelons que (voir [3])

$$\begin{aligned} w\_eli\ f_n(x) &:= \inf\{\liminf f_n(x_n)\ :\ x_n \rightharpoonup x\}\,,\\ s\_els\ f_n(x) &:= \min\{\limsup f_n(x_n)\ :\ x_n \to x\}\,. \end{aligned}$$

Soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction finie en $x \in X$ et soient les quotients différentiels du 1^{er} et du $2^{\text{ème}}$ ordre de f en x

$$\begin{aligned} (\Delta_t f)_x(.) &:= \frac{f(x+t.)-f(x)}{t}\\ (\Delta_t^2 f)_{x,x^*}(.) &:= \frac{1}{t^2}\left[f(x+t.)-f(x)-t < x^*, . >\right] \end{aligned}$$

où $x^* \in X^*$.

La fonction f est dite épi-dérivable en x [12] si pour toute suite $(t_n) \searrow 0$ la suite $((\Delta_{t_n} f)_x)_n$ Mosco converge vers une fonction notée f'_x vérifiant $f'_x(0) = 0$. Dans ce cas un élément $x^* \in X^*$ vérifiant $f'_x(.) \geq < x^*, . >$ est un épi-gradient de f en x. Rappelons que si f est convexe alors l'ensemble des épi-gradients de f en x et le sous-différentiel $\partial f(x)$ de f en x coincident et de plus f est épi-dérivable en x si et seulement si $\partial f(x) \neq \emptyset$. Voir à ce propos [12, 6, 4].

La fonction f est deux fois épi-dérivable en x relativement à $x^* \in X^*$ (en abrégé on dira en (x, x^*)) si f est épi-dérivable en x et pour toute suite $(t_n) \searrow 0$ la suite de fonctions $((\Delta^2_{t_n} f)_{x,x^*})_n$ Mosco-converge vers une fonction notée f''_{x,x^*} et vérifiant $f''_{x,x^*}(0) = 0$. Une forme bilinéaire symétrique H est un épi-hessien de f en (x, x^*) si $f''_{x,x^*}(v) \geq H(v, v)$. L'ensemble des épi-hessiens de f en (x, x^*) sera noté $E_{x,x^*}(f)$. Rappelons que si f est convexe et deux fois épi-dérivable en (x, x^*) alors $x^* \in \partial f(x)$.

Les résultats principaux de ce travail sont d'une part l'étude de la Mosco convergence d'une suite de fonctions DC (à notre connaissance aucun travail n'a été fait dans ce cadre) et d'autre part l'étude des conditions d'optimalité du second ordre en utilisant les épi-dérivées. Rappelons que J.B. Hiriart Urruty [9] a donné des conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité du premier ordre pour le problème (P) suivant

$$(P) \qquad \text{minimiser } f(x),\ x \in X\,,$$

où f est une fonction DC, i.e. $f(x) = g(x) - h(x)$, g et h sont convexes semi-continues inférieurement $(s.c.i)$ propres en utilisant le sous-différentiel à ϵ-près.

2. Mosco-Convergence d'une Suite de Fonctions DC

Dans cette section $(f_n)_n$ est une suite de fonctions DC et $((g_n, h_n))_n$ est une décomposition DC de $(f_n)_n$, i.e., $f_n = g_n - h_n$ pour tout $n \in N$.

Afin d'étudier la Mosco-convergence d'une suite de fonctions DC, nous introduisons une approximée $f_{\lambda,\mu}$ d'indices $\lambda, \mu > 0$ d'une fonction DC f.

Définition 2.1. Soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction DC et (g, h) une décomposition DC de f. Nous définissons l'approximée d'indices $\lambda, \mu > 0$ de f par

$$f_{\lambda,\mu}(x) := \sup_{v \in X} \inf_{u \in X} \left[g(u) - h(v) + \frac{1}{2\lambda} \|x - u\|^2 - \frac{1}{2\mu} \|x - v\|^2 \right].$$

Il est facile de voir que

$$f_{\lambda,\mu}(x) = g_\lambda(x) - h_\mu(x)$$

où $g_\lambda(x) = \inf_{y\in X}\left[g(y) + \frac{1}{2\lambda}\|y-x\|^2\right]$ est l'approximée Moreau-Yosida d'indice λ de g.

Rappelons le théorème suivant (voir le théorème 3.26 du livre d'Attouch [3]) qui nous sera utile pour la suite. On y suppose que X est de type C (voir [3], Définition 3.25, p. 304).

THÉORÈME 2.2. *Soient (g_n), g une suite de fonctions convexes s.c.i propres. Lesassertions suivantes sont équivalentes*

(i) *$M\_elm\ g_n = g$;*

(ii) *pour tout $\lambda > 0$, $(g_n)_\lambda$ converge simplement vers g_λ.*

PROPOSITION 2.3. *Pour tout $x \in X$ on a*

$$s\_els\ f_n(x) \le s\_els\ g_n(x) - w\_eli\ h_n(x)\,.$$

Preuve. Pour $x_n \to x$ on a

$$\begin{aligned}\limsup f_n(x_n) &\le \limsup g_n(x_n) - \liminf h_n(x_n)\\ &\le \limsup g_n(x_n) - \inf\{\liminf h_n(y_n)\ :\ y_n \rightharpoonup x\}\,.\end{aligned}$$

Ainsi, pour toute suite $x_n \to x$ on a

$$s\_els\ f_n(x) \le \limsup g_n(x_n) - w\_eli\ h_n(x)\,,$$

donc

$$s\_els\ f_n(x) \le s\_els\ g_n(x) - w\_eli\ h_n(x)\,. \blacksquare$$

En utilisant l'approximation ci-dessus, on obtient le résultat suivant similaire à la proposition 2.3.

PROPOSITION 2.4. *Supposons que*

(i) $s\_els\ g_n(x) \le \sup_{\lambda>0}\ \liminf\,(g_n)_\lambda(x)$,

(ii) $s\_eli\ h_n(x) \ge \sup_{\mu>0}\ \limsup\,(h_n)_\mu(x)$, où $s\_eli\ h_n(x) := \inf\{\liminf h_n(x_n)\ :\ x_n \to x\}$. *Alors*

$$s\_els\ f_n(x) \leq \inf_{\mu>0} \sup_{\lambda>0} \liminf (f_n)_{\lambda,\mu}(x)\,.$$

Preuve. Dáprés (i), il existe $\overline{x}_n \to x$ telle que

$$\limsup g_n(\overline{x}_n) \leq \sup_{\lambda>0} \liminf (g_n)_\lambda(x)\,,$$

i.e., pour tout $\mu > 0$

$$\limsup (f_n(\overline{x}_n) + h_n(\overline{x}_n)) \leq \sup_{\lambda>0} \liminf [(f_n)_{\lambda,\mu}(x) + (h_n)_\mu(x)]\,,$$

donc

$$\limsup f_n(\overline{x}_n) + \liminf h_n(\overline{x}_n) \leq \sup_{\lambda>0} \liminf (f_n)_{\lambda,\mu}(x) + \limsup (h_n)_\mu(x)\,,$$

ce qui implique pour tout $\mu > 0$

$$\limsup f_n(\overline{x}_n) + \liminf h_n(\overline{x}_n) - \limsup (h_n)_\mu(x) \leq \sup_{\lambda>0} \liminf (f_n)_{\lambda,\mu}(x)\,.$$

Tenant compte de l'hypothèse (ii) nous obtenons pour tout $\mu > 0$

$$\limsup f_n(\overline{x}_n) \leq \sup_{\lambda>0} \liminf (f_n)_{\lambda,\mu}(x)\,.$$

Ainsi

$$\limsup f_n(\overline{x}_n) \leq \inf_{\mu>0} \sup_{\lambda>0} \liminf (f_n)_{\lambda,\mu}(x)\,,$$

et puisque

$$s\_els\ f_n(x) := \min\{\limsup f_n(x_n)\ :\ x_n \to x\} \leq \limsup f_n(\overline{x}_n)\,,$$

la preuve est achevée. ∎

Remarques 2.5. (a) Si g_n et h_n sont Mosco-convergentes alors les conditions (i) et (ii) sont vraies (voir théorème 2.2).

(b) Si on remplace (ii) par la condition (ii)$'$,

$$\text{(ii)}' \qquad \inf\{\liminf h_n(x_n)\ :\ x_n \to x\} \geq \sup_{\mu>0} \liminf (h_n)_\mu(x)\,,$$

la conclusion de la proposition précédente devient

$$s\_els\ f_n(x) \leq \sup_{\lambda>0} \inf_{\mu>0} \limsup (f_n)_{\lambda,\mu}(x)\,.$$

PROPOSITION 2.6. *Supposons que*

(i) $w\_eli\ g_n(x) \geq \sup_{\lambda>0} \liminf (g_n)_\lambda(x)$,

(ii) *Pour toute suite* $x_n \rightharpoonup x$, $\limsup h_n(x_n) \leq \inf_{\mu>0} \liminf (h_n)_\mu(x)$.

Alors

$$w\_eli\ f_n(x) \geq \inf_{\mu>0} \sup_{\lambda>0} \liminf (f_n)_{\lambda,\mu}(x)\,.$$

Preuve. D'après (i) pour toute suite $x_n \rightharpoonup x$ et pour tout $\mu > 0$

$$\begin{aligned}\liminf (f_n + h_n)(x_n) &\geq \sup_{\lambda>0} \liminf [(f_n)_{\lambda,\mu}(x) + (h_n)_\mu(x)] \\ &\geq \sup_{\lambda>0} \liminf (f_n)_{\lambda,\mu}(x) \; + \; \liminf (h_n)_\mu(x)\,,\end{aligned}$$

(P)

donc en passant à l'inf sur μ on obtient

$$\begin{aligned}&\liminf f_n(x_n) + \limsup h_n(x_n) \\ &\qquad \geq \inf_{\mu>0} \liminf (h_n)_\mu(x) \; + \; \inf_{\mu>0} \sup_{\lambda>0} \liminf (f_n)_{\lambda,\mu}(x)\,,\end{aligned}$$

et d'après (ii) l'inégalité précedente implique

$$\liminf f_n(x_n) \geq \inf_{\mu>0} \sup_{\lambda>0} \liminf (f_n)_{\lambda,\mu}(x)\,.$$

Comme la suite (x_n) est arbitraire la preuve est achevée. ∎

Comme conséquence des propositions 2.4 et 2.5 on obtient le résultat important suivant.

THÉORÈME 2.7. *Supposons que*

(i) $M\_elm\ g_n = g$;

(ii) $\inf \{\liminf h_n(x_n) \ : \ x_n \to x\} \geq \sup_{\mu>0} \limsup (h_n)_\mu(x)$;

(iii) *Pour toute suite* $x_n \rightharpoonup x$ $\limsup (h_n)(x_n) \leq \inf_{\mu>0} \liminf (h_n)_\mu(x)$.

Alors $M\_elm\ f_n = f$ *avec* $f(x) = \inf_{\mu>0} \sup_{\lambda>0} \liminf (f_n)_{\lambda,\mu}(x)$.

Preuve. C'est une conséquence directe des propositions 2.4 et 2.6. ∎

Remarque 2.8. L'hypothèse (ii) du téorème 2.7 est vérifiée par exemple si (h_n) est Mosco-convergente.

Sous l'hypothèse supplémentaire que la suite $(h_n)_n$ soit faiblement sequentiellement équi-continue supérieurement (équi-s.c.s) on obtient le résultat suivant. Notons que si X est de dimension finie l'équi-s.c.s. sequentielle faible n'est autre que l'équi-semi-continuité supérieure.

COROLLAIRE 2.9. *Supposons que X est du type C. Si* $M\_elm\ g_n = g$ *et* $M\_elm\ h_n = h$*, alors* $M\_elm\ f_n = g - h$.

Preuve. D'après le théorème 2.2 on a

$$\lim (g_n)_\lambda(x) = g_\lambda(x) \quad \text{et} \quad \lim (h_n)_\mu(x) = h_\mu(x)\,,$$

et par suite

$$\liminf\,[(g_n)_\lambda(x) - (h_n)_\mu(x)] = g_\lambda(x) - h_\mu(x)$$

et par le théorème 2.7 on a

$$\begin{aligned} M\_elm\ f_n(x) &= \sup_{\lambda>0} \inf_{\mu>0} (g_\lambda(x) - h_\mu(x)) \\ &= \sup_{\lambda>0} g_\lambda(x) - \sup_{\mu>0} h_\mu(x) \\ &= g(x) - h(x)\,. \ \blacksquare \end{aligned}$$

L'exemple suivant montre que l'hypothèse d'équi s.c.s. de la suite $(h_n)_n$ dans le théorème 2.7 est essentielle.

EXEMPLE 2.10. Soient $(h)_n$, $(g)_n$ et (f_n) les fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$ par

$$h_n(x) = n|x|\ ;\ g_n(x) = \sqrt{n}\,x^2 \text{ et } f_n = g_n - h_n\,.$$

Il est facile de voir que

$$elm\ h_n(0) = elm\ g_n(0) = 0$$

alors que $elm\ f_n(0) = -\infty$ (où $elm\ k_n(x)$ désigne l'épi-limite de k_n). Nous concluons que

$$elm\ f_n(0) \neq elm\ g_n(0) - elm\ h_n(0)\,.$$

3. Condition d'optimalité du second ordre pour les problèmes DC

Dans cette section, nous nous interessons au problème d'optimisation DC suivant

$$(P) \qquad \text{minimiser } f(x), \ x \in X ,$$

où f est une fonction DC ayant la décomposition (g, h). A cette fin, nous commençons par l'étude des Mosco-épi-dérivées (première et seconde) de f. Les quotients différentiels du premier et du second ordre de f sont aussi des fonctions DC puisque si x est dans le domaine de f on a

$$(\Delta_t f)_x(v) = (\Delta_t g)_x(v) - (\Delta_t h)_x(v)$$

et

$$(\Delta_t^2 f)_{x,x^*}(v) = (\Delta_t^2 g)_{x,x_1^*}(v) - (\Delta_t^2 h)_{x,x_2^*}(v)$$

pour tous x_1^*, $x_2^* \in X^*$ tels que $x^* = x_1^* - x_2^*$.

Comme conséquence directe du théorème 2.7, nous avons les résultats suivants.

Théorème 3.1. *Si g et h sont épi-dérivables en x et si pour toute suite $(t_n) \searrow 0$ et pour tout $v_n \rightharpoonup v$*

$$(3.1) \qquad \limsup\, (\Delta_{t_n} h)_x(v_n) \leq h'_x(v) ,$$

alors f est épi-dérivable en x, son épi-dérivée est DC et on a

$$f'_x(.) = g'_x(.) - h'_x(.) .$$

Remarque 3.2. Si h est de classe C^1 alors la relation (3.1) est vérifiée. En effet, pour toutes suites $(t_n) \searrow 0$ et $(v_n) \rightharpoonup v$ on a

$$(\Delta_{t_n} h)_x(v_n) =< Dh(x), v_n > +\|v_n\|\epsilon(t_n v_n) ,$$

où $\lim_{u\to 0} \epsilon(u) = 0$. En passant à la limite supérieure on a le résultat.

THÉORÈME 3.3. *Si g et h sont deux fois épi-dérivable respectivement en (x, x_1^*) et (x, x_2^*), et si pour tous $(t_n) \searrow 0$ et $v_n \rightharpoonup v$*

$$\limsup\, (\Delta_{t_n}^2 h)_{x,x_2^*}(v_n) \leq h''_{x,x_2^*}(v)\,, \tag{3.3}$$

alors f est deux fois épi-dérivable en $(x, x_1^* - x_2^*)$ son épi-dérivée seconde est DC et on a

$$f''_{x,x_1^*-x_2^*}(\cdot) = g''_{x,x_1^*}(\cdot) - h''_{x,x_2^*}(\cdot)\,.$$

Preuve. Montrons tout d'abord que la relation (3.3) entraine (3.1). Pour toute suite $(t_n) \searrow 0$ et tout $v_n \rightharpoonup v$ on a

$$(\Delta_{t_n} h)_x(v_n) = t_n(\Delta_{t_n}^2 h)_{x,x_2^*}(v_n) + < x_2^*, v_n > \,.$$

Comme

$$\limsup\, t_n(\Delta_{t_n}^2 h)_{x,x_2^*}(v_n) = 0$$

et

$$\limsup < x_2^*, v_n > = < x_2^*, v > \leq h'_x(v)$$

(car h étant convexe et deux fois épi-dérivable en (x, x_2^*) alors x_2^* est un épi-gradient (voir [12, 6, 4])), d'après le théorème 3.1 f est épi-dérivable au premier ordre en x et pour terminer la preuve, il suffit d'appliquer le théorème 2.7 aux quotients différentiels

$$(\Delta_t^2 f)_{x,x_1^*-x_2^*}(\cdot) = (\Delta_t^2 g)_{x,x_1^*}(\cdot) - (\Delta_t^2 h)_{x,x_2^*}(\cdot)\,. \quad \blacksquare$$

Remarque 3.4. Si la fonction $v \to < D^2h(x)v, v >$ est faiblement sequentiellement *s.c.s.* et si h est de classe C^2 en x alors la relation (3.3) est satisfaite. En effet si h est de classe C^2 en x

$$(\Delta_{t_n}^2 h)_{x,\nabla h(x)}(v_n) = < D^2h(x)v_n, v_n > + \|v_n\|\epsilon(t_n v_n)\,.$$

Notons que les problèmes de minimisation d'une fonction DC sous contraintes convexes et de maximisation convexe sous contraintes convexes se ramenent au problème (P) voir à ce propos [9].

Les conditions d'optimalité utilisant les épi-dérivées ont été obtenues dans [12, 4]. Pour les problèmes DC nous avons les résultats suivants.

THÉORÈME 3.5. (CONDITIONS NÉCESSAIRES) *Supposons que $\overline{x}$ est un minimum local pour f.*

(i) *Si g et h sont épi-dérivable en $\overline{x}$ alors*

(a) *pour tout $v \in X$, $g'_{\overline{x}}(v) \geq h'_{\overline{x}}(v)$;*

(b) *$\partial h(\overline{x}) \subset \partial g(\overline{x})$ (de plus $\partial h(\overline{x}) \neq \emptyset$).*

(ii) *Si g et h sont deux fois épi-dérivable en $(\overline{x}, x^*)$ alors*

(a) *pour tout $v \in X$*

$$g''_{\overline{x},x^*}(v) \geq h''_{\overline{x},x^*}(v) \geq 0\,;$$

(b) *$E_{\overline{x},x^*}(h) \subset E_{\overline{x},x^*}(g)$.*

Preuve. (i)(a) Par hypothèse, pour tout $v \in X$ et tout t assez petit on a

$$f(\overline{x}+tv) - f(\overline{x}) \geq 0$$

et par suite

$$(\Delta_t g)_x(v) \geq (\Delta_t g)_x(v)\,,$$

ainsi

$$g'_{\overline{x}}(v) \geq h'_{\overline{x}}(v)\,.$$

(i)(b) L'inclusion est une conséquence directe du (a) et de la définition d'un épi-gradient. La non vacuité du $\partial h(\overline{x})$ est équivalente à l'épi-dérivabilité de h en $\overline{x}$.

(ii)(a) Comme h est deux fois épi-dérivable en $(\overline{x}, x^*)$ alors $x^* \in \partial h(\overline{x})$. Donc $(\Delta_t^2 h)_{\overline{x},x^*}(.) \geq 0$. Ainsi la deuxième inégalité est prouvée. La première inégalité se démontre comme au (i)(a).

(ii)(b) C'est une conséquence directe de la définition d'un épi-hessien et du (ii)(a). ∎

THÉORÈME 3.6. (CONDITIONS SUFFISANTES) *Soit $\overline{x}$ un point donné de X. Supposons qu'il existe $x^* \in \partial g(\overline{x}) \cap \partial h(\overline{x})$ tel que g, h et f soient respectivement épi-dérivables en $(\overline{x}, x^*)$, $(\overline{x}, x^*)$ et $(\overline{x}, 0)$ et que $f''_{\overline{x},0}(.) = g''_{\overline{x},x^*}(.) - h''_{\overline{x},x^*}(.)$. Si pour tout $v \neq 0$*

$$g''_{\overline{x},x^*}(v) > h''_{\overline{x},x^*}(v)\,,$$

alors $\overline{x}$ est un minimum local pour f.

Preuve. Si $\overline{x}$ n'est pas minimum local alors il existe une suite $(x_n) \to \overline{x}$ telle que
$$f(x_n) < f(\overline{x}).$$

Posons $v_n := (x_n - \overline{x})/\|x_n - \overline{x}\|$ et $t_n := \|x_n - \overline{x}\|$. De la suite (v_n) on peut extraire une sous suite, notée encore (v_n), qui converge faiblement vers un $\overline{v} \in X$ et comme
$$(f(\overline{x} + t_n v_n) - f(\overline{x}))/t_n^2 < 0$$
on obtient
$$f''_{\overline{x},0}(\overline{v}) = g''_{\overline{x},x^*}(\overline{v}) - h''_{\overline{x},x^*}(\overline{v}) \leq 0$$
ce qui contredit l'hypothèse et la preuve est términée. ∎

REMERCIEMENTS

Nous remercions les référés ainsi que les Professeurs H. Riahi et L. Thibault pour leurs corrections et suggestions.

RÉFÉRENCES

[1] ALLALI, T., AMAHROQ, T., Approximations et conditions nécéssaires d'optimalité du second ordre, *Optimisation* 93/23 U.R.A 1204.

[2] AMAHROQ, T., "Proto-Différentiabilité de Multi-Applications et ÉpiDifférentiabilité de Fonctions Numériques", Thèse de Doctorat, Université de Pau, 1992.

[3] ATTOUCH, "Variational Convergence for Functions and Operators", Pitman, New York, 1984.

[4] COMINETTI, R., On pseudo-differentiability, *Trans. Amer. Math. Soc.* **324** (1991), 843–865.

[5] COMINETTI, R., CORREA, R., A generalized second order derivative in nonsmooth optimization, *SIAM Control Optim.* **28** (1990), 787–809.

[6] DO, C.N., Generalized second order derivatives of convex functions in reflexif Banach spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* **334** (1992), 281–301.

[7] ELHILALI ALAOUI, A., "Fonction DC à Valeurs dans un Espace de Banach Ordonné Caractérisation des fonctions DC", Thése de 3^{ieme} cycle, Faculté des Sciences, Tetuan, 1989.

[8] ELLIA, R., "Contributions à l'Optimisation Globale et à l'Analyse Non Différentiable", Thése d'etat Faculté des Sciences, Rabat, 1993.

[9] HIRIART-URRUTY, J.B., From convex optimization to non convex optimization, in "Nonsmooth Optimization and Related Topics", Clarke, Demyanov, Giannessi editors, Plenum Press, 1989, 219–239.

[10] KAWASAKI, H., Second order necessary optimality condition for minimizing a sup-type function, *Math. Prog.* **49** (1990/91), 213–230.

[11] POLIQUIN, A.R., An extention of Attouch's theorem and its application to second-order epi-differentiation of convexly composite functions, *Trans. Amer. Math. Soc.* **332** (1992), 861–874.

[12] ROCKAFELLAR, R.T. , First and second order pseudo-differentiability in nonlinear programming, *Trans. Amer. Math. Soc.* **307** (1988), 75 – 108.

[13] SEEGER, A. , Second derivative of convex function and of its Legendre-Fenchel transformate, *SIAM J.Optim.* **2** (1992), 405 – 424.

[14] THIBAULT, L. , On subdifferential of optimal value function, *SIAM. J. Control Optim.* **29** (1991), 1019 – 1036.