EXTRACTA MATHEMATICAE Vol. 9, Núm. 3, 181 – 189 (1994)

Commutativité et Caractérisations du Radical des Algebres non Associatives

M. AKKAR ET M. LAAYOUNI

U.F.R. de Math–Info, Univ. de Bordeaux I, 33405 *Talence Cedex, France*

(Presented by J. Galé)

AMS *Subject Class.* (1991): 46Hxx, 17Axx *Received May* 12 ,1994

INTRODUCTION

Il est bien connu qu'une $\mathbb{C}$-algèbre de Banach unitaire A est commutative si, et seulement si, la condition $(\mathcal{C})$ suivante est satisfaite:

$(\mathcal{C})$: Il existe une constante $\alpha > 0$ telle que $\forall x, y \in A, \|xy\| \leq \alpha \|yx\|$ [1].

On montre que cette caractérisation de la commutativité reste valable pour des algèbres non associatives à savoir les algèbres alternatives. On en déduit qu'une $\mathbb{C}$-algèbre alternative A normée complète unitaire semi-simple vérifiant $(\mathcal{C})$ est une algèbre de Banach commutative.

Dans le paragraphe II, on étudie le radical de Jacobson–McCrimmon d'une algèbre de Jordan: On sait que si A est une algèbre associative, alors le radical de Jacobson de A, qui est la somme de tous les idéaux quasi-inversibles de A, est caractérisé par

$$\mathrm{Rad}(A) = \{a \in A : \forall x \in A, 1 - ax \text{ est inversible}\},$$
$$\mathrm{Rad}(A) = \{a \in A : \forall x \in A, 1 - xa \text{ est inversible}\}.$$

Ce qui n'est pas en général vrai pour les algèbres non associatives. Cependant, à l'aide du produit quadratique $x \mapsto U_a(x) = 2a(ax) - a^2x$, on donne une caractérisation semblable dans le cas d'une algèbre de Jordan J:

$$\mathrm{Rad}(J) = \{a \in J : \forall x \in J, 1 - U_a(x) \text{ est inversible}\}.$$

Or si A est associative (sur un corps contenant $1/2$) et si A^+ est l'algèbre de Jordan spéciale associée à A (A^+ est l'espace vectoriel A muni du produit de Jordan $x \circ y = (xy + yx)/2$), alors $\mathrm{Rad}(A^+) = \mathrm{Rad}(A)$ et on obtient

$$\mathrm{Rad}(A) = \{a \in A : \forall x \in A, 1 - axa \text{ est inversible}\}.$$

Ainsi toute algèbre associative A semi-simple sur un corps contenant $1/2$ est semi–première (i.e. $aAa = \{0\} \Rightarrow a = 0$). En utilisant le théorème de Johnson–Sinclair [5] on déduit une autre démonstration du théorème de la continuité automatique des dérivations de Jordan sur toute algèbre de Banach semi-simple, obtenu par Bresar dans [2] (rappelons qu'une application linéaire D d'une algèbre A dans elle même est une dérivation de Jordan si $D(a^2) = aD(a) + D(a)a$ pour tout a dans A).

I. Théorème de Le Page pour des Algèbres Complexes non Associatives Normées Complètes

I.1. Théoreme de Le Page dans le cas des algèbres alternatives

Un algèbre A est alternative si le produit vérifie: $\forall x, y \in A$, $x(xy) = x^2y$ et $(yx)x = yx^2$.

A l'exception de I.1.2 et I.1.11, les propriétés de cette section I.1 sont démontrées dans [1] pour une algèbre associative. En utilisant [11, p. 205] les mêmes preuves restent valables pour une algèbre alternative. Ainsi on a:

Théorème I.1.1. *Si A est une algèbre alternative normée complète unitaire, alors: A est commutative si, et seulement si, il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x, y \in A$, $\|xy\| \le \alpha\|yx\|$.*

Remarque I.1.2. Dans le théorème I.1.1, le fait que A soit unitaire est nécessaire, car on a un contre exemple dans le cas contraire:

Soit E un espace vectorial complexe de dimension supérieure à 4. Soient e_1 et e_2 deux vecteurs non colinéaires. Sur E on définit le produit suivant: $e_1.e_1 = e_2.e_2 = 0$, $e_i.e_j.e_i = 0$ si $\{i;j\} = \{1;2\}$ et $e_1.e_2$, $e_2.e_1$ deux éléments de E tels que $\beta = \{e_1; e_2; e_1.e_2 = e_3; e_2.e_1 = e_4\}$ soit un système libre dans E. On considère le sous-espace vectoriel A de E dont β est une base. $(A, +, .)$ est une algèbre complexe.

Pour tout $x = \sum_{n=1}^4 \alpha_n e_n \in A$, on pose $\|x\| = \sum_{n=1}^4 |\alpha_n|$. Ainsi A est une algèbre de Banach, qui vérifie $\forall x, y \in A$, $\|x.y\| = \|y.x\|$, mais A n'est pas commutative.

Le théorème n'est pas valable dans le cas des algèbres réelles, puisque l'algèbre des octonions de Cayley–Dixon, Q, est non commutative et vérifie: $\forall x, y \in Q$; $|xy| = |yx| = |x|\,|y|$.

Soient A une algèbre alternative unitaire et $x \in A$. On dit que x est inversible s'il existe $y \in A$ tel que $xy = yx = 1$. x est quasi–inversible si $1 - x$ est inversible. L'ensemble des éléments inversibles est noté $\mathrm{Inv}(A)$.

DÉFINITION I.1.3. 1) On apelle spectre d'un élément x de A, qu'on note $\mathrm{sp}_A(x)$ (ou tout simplement $\mathrm{sp}(x)$), l'ensemble: $\mathrm{sp}(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (x - \lambda 1_A) \notin \mathrm{Inv}(A)\}$.

2) Pour $x \in A$ on pose $\rho(x) = \inf\{\|x^n\|^{1/n}, n \geq 1\}$.

Puisque $\forall n \geq 1$, $0 \leq \|x^n\|^{1/n} \leq \|x\|$, on a pour tout $x \in A$, $\rho(x) \leq \|x\|$.

PROPOSITION I.1.4. *Soient A une algèbre alternative unitaire normée complète et x, y deux éléments de A. Alors* $\mathrm{sp}(xy) \cup \{0\} = \mathrm{sp}(yx) \cup \{0\}$.

COROLLAIRE I.1.5. *Soient A une algèbre alternative unitaire normée complète et x, y deux éléments de A. Alors $\rho(xy) = \rho(yx)$.*

THÉORÈME I.1.6. *Soit A une algèbre alternative unitaire normée complète. S'il existe $k > 0$ tel que $\forall x \in A$, $\|x\|^2 \leq k\|x^2\|$, alors A est commutative.*

COROLLAIRE I.1.7. *Soient A une algèbre alternative normée complète telle que $\forall x \in A$, $\|x^2\| = \|x\|^2$. Alors A est commutative.*

COROLLAIRE I.1.8. *Si A une algèbre alternative normée complète de dimension finie, telle que $\forall x \in A$, $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$, alors A est commutative.*

Preuve. 1^{er} – cas: A est unitaire. L'application $\Phi : x \mapsto \|x^2\|$ est continue, et la sphère unité S^1 de A est compacte, donc il existe $c > 0$ tel que $c \leq \|x^2\|$ pour tout $x \in S^1$. Si $k = 1/c$, alors:

$$\frac{1}{k} \leq \inf\{\|x^2\| : \|x\| = 1\}.$$

Ainsi pour $x \in S^1$, $1/\|x^2\| \leq k$. Donc $\forall x \neq 0, \|x\|^2 \leq k\|x^2\|$, ce qui est vrai aussi pour $x = 0$. D'après I.1.6, A est commutative.

2^{eme} – cas: A non unitaire. Soit $A' = A \bigoplus \mathbb{C}$. A' est unitaire et vérifie:

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall x \in A, \quad [(x + \lambda)^2 = 0] \Rightarrow [x^2 = 0 \text{ et } \lambda = 0] \Rightarrow [x = 0 \text{ et } \lambda = 0]$$

D'après le premier cas, A' est commutative et par suite A est commutative. ∎

Remarques I.1.9. i) Le Corollaire I.1.8 est en particulier vrai pour les algèbres complexes alternatives normées complètes de dimension finie sans élément nilpotent. (On rapelle qu'un élément non nul x de A est nilpotent s'il existe $n \geq 1$ tel que $x^n = 0$).

ii) Si A est une $\mathbb{C}$–algèbre alternative normée complète de dimension finie non commutative alors il existe $x \in A$ tel que: $\|x\| = 1$ et $x^2 = 0$.

THÉORÈME I.1.10. ([10, p. 706]) *Si une algèbre alternative A semi-simple est commutative, alors A est associative.*

Rapelons que le radical de A est l'intersection des idéaux modulaires maximaux. Si A est unitaire, alors les notions d'idéaux maximaux modulaires et d'idéaux maximaux coïncident. Si de plus A est normée complète alors $\mathrm{Inv}(A)$ est un ouvert et par suite tout idéal maximal est fermé. Ainsi $\mathrm{Rad}(A)$ est fermé.

THÉORÈME I.1.11. *Soit A une algèbre alternative unitaire normée complète telle qu'il existe une constante $\alpha > 0$ vérifiant $\forall x, y \in A$, $\|xy\| \leq \alpha\|yx\|$. Alors $A/\mathrm{Rad}(A)$ est une algèbre de Banach commutative.*

Preuve. Soit $\tilde{A} = A/\mathrm{Rad}(A)$ qu'on munit de la norme quotient. $\tilde{A}$ est une algèbre alternative unitaire normée complète telle que:

$$\forall X, Y \in \tilde{A},\ \|XY\| \leq \alpha\|YX\|.$$

En effect soient $X, Y \in \tilde{A}$,

$$\begin{aligned}\|XY\| &= \inf\{\|uv\| : u \in X, v \in Y\} \\ &= \inf\{\alpha\|vu\| : u \in X, v \in Y\} = \alpha\|YX\|.\end{aligned}$$

D'après le Théorème I.1.1 $\tilde{A}$ est commutative. D'autre part $\tilde{A}$ est une algèbre alternative sans radical, d'après I.1.10, $\tilde{A}$ est associative. ∎

II. CARACTÉRISATIONS DU RADICAL DE MCCRIMMON–JACOBSON D'UNE ALGÈBRE DE JORDAN

Rappels II.1. ([4]) Soient J une $\mathbb{C}$-algèbre de Jordan unitaire et a un élément de J. Par définition, le a-homotope de J (noté $J^{(a)}$) est l'espace vectoriel J, muni du produit triple de Jordan:

$$x._{(a)}\, y = \{xay\} := (xa)y + (ay)x - (xy)a.$$

Si a est inversible alors $J^{(a)}$ admet une unité $1^{(a)} = a^{-1}$ et $\left(J^{(a)}\right)^{(a^{-2})} = J$; si a n'est pas inversible on notera $1^{(a)}$ l'unité de $J^{(a)} \bigoplus \mathbb{C}$ (où $J^{(a)} \bigoplus \mathbb{C}$ est l'algèbre obtenue à partir de $J^{(a)}$ par adjonction d'une unité).

DÉFINITION II.2. Un élément x de J est proprement quasi-inversible si x est quasi-inversible dans tout homotope $J^{(y)}$ de J, $y \in J$.

THÉORÈME II.3. (McCrimmon [8]) *Si J est une algèbre de Jordan unitaire alors:*

i) *x est quasi–inversible dans $J^{(y)}$ si, et seulement si, y est quasi–inversible dans $J^{(x)}$.*

ii) *$U_z(x)$ est quasi-inversible dans $J^{(y)}$ si, et seulement si, x est quasi–inversible dans $J^{(U_z(y))}$.*

iii) *Le radical de J cincide avec l'ensemble de tous les éléments proprement quasi–inversibles de J.*

LEMME II.4. *Soient J une algèbre de Jordan unitaire et $x \in J$. Alors $U_{1-x^2} = U_{1-x}U_{1+x}$*

Preuve. Soit $y \in J$. D'après le théorème de Shirshov [4, p. 47] la sous–algèbre, $C(x,y)$, de J engendrée par $1, x$ et y est une algèbre spéciale de Jordan, c'est à dire que $C(x,y)$ est isomorphe à une sous–algèbre A^+, où A est une algèbre associative. Ainsi

$$\begin{aligned} U_{1-x^2}(y) &= (1-x^2)y(1-x^2) \\ U_{1-x}U_{1+x} &= (1-x)\left(U_{1+x}(y)\right)(1-x) \\ &= (1-x)\big((1+x)y(1+x)\big)(1-x) \\ &= (1-x^2)y(1-x^2) \end{aligned}$$

Donc $U_{1-x^2}(y) = U_{1-x}U_{1+x}(y)$. ∎

THÉORÈME II.5. *Soient J une algèbre de Jordan et $x \in J$. Alors*

$$x \in \mathrm{Rad}(J) \Leftrightarrow x^2 \in \mathrm{Rad}(J).$$

Preuve. Soit $x \in J$, $x \in \mathrm{Rad}(J) \Leftrightarrow x, -x \in \mathrm{Rad}(J)$

$\Leftrightarrow$ x et $-x$ sont proprement quasi-inversibles (d'àprés le théoreme II.3),

$\Leftrightarrow \forall y \in J,\ U^{(y)}_{1-x}$ et $U^{(y)}_{1+x}$

sont inversibles dans l'algèbre des opérateurs $L\left(J^{(y)}\right)$,

$\Leftrightarrow \forall y \in J,\ U^{(y)}_{1^{(y)}-x}U^{(y)}_{1^{(y)}+x}$ est inversible dans $L\left(J^{(y)}\right)$,

$\Leftrightarrow \forall y \in J,\ U^{(y)}_{1^{(y)}-x^2}$ est inversible dans $L\left(J^{(y)}\right)$ (Lemme II.4),

$\Leftrightarrow$ x^2 est proprement quasi-inversible,

$\Leftrightarrow$ $x^2 \in \mathrm{Rad}(J)$.

∎

Remarque II.6. Cette propriété est évidente si J est associative normée complète, car dans ce cas le radical de J sera l'intersection des noyaux des formes linéaires multiplicatives de J.

THÉORÈME II.7. *Si J est une algèbre de Jordan unitaire, alors*

$$\mathrm{Rad}(J) = \{x \in J : \forall y \in J, 1 - U_x(y) \text{ est inversible } \}.$$

Preuve. Soit $x \in J$, on a

$$x \notin \mathrm{Rad}(J) \Leftrightarrow x^2 \notin \mathrm{Rad}(J) \quad \text{(Théorème II.5)},$$

$\Leftrightarrow$ x^2 non proprement quasi-inversible dans J (Théorème II.3),
$\Leftrightarrow$ $\exists y \in J$ tel que x^2 soit non quasi-inversible dans $J^{(y)}$,
$\Leftrightarrow$ $\exists y \in J$ tel que $U_x(1)$ soit non quasi-inversible dans $J^{(y)}$,
$\Leftrightarrow$ $\exists y \in J$ tel que 1 soit non quasi-inversible dans $J^{(U_x(y))}$,
$\Leftrightarrow$ $\exists y \in J$ tel que $U_x(y)$ soit non quasi-inversible dans $J^{(1)} = J$.

Donc $x \in \mathrm{Rad}(J) \Leftrightarrow \forall y \in J$, $1 - U_x(y)$ est inversible dans J. ∎

Un sous-espace vectoriel M d'une algèbre de Jordan unitaire J est un idéal quadratique si: $\forall a \in M, \forall x \in J, U_a(x) \in M$. Si de plus M est maximal parmi tous les idéaux quadratiques de J, on dit que M est un idéal quadratique maximal de J.

THÉORÈME II.8. (Hogben–McCrimmon [3, p. 163]) *Soit J une algèbre de Jordan unitaire. Alors le radical de J est l'intersection de tous les idéaux quadratiques modulaires maximaux.*

Preuve. Notons $\mathcal{MQ}(J)$ l'ensemble de tous les idéaux quadratiques maximaux de J. Monstrons que $\mathrm{Rad}(J) = \bigcap_{M \in \mathcal{MQ}(J)} M$. Remarquons que puisque J est unitaire, alors un idéal quadratique Q est propre si et seulement si $1 \notin Q$. Ainsi tout idéal quadratique propre est contenu dans un idéal quadratique maximal. En effet, si $\mathcal{F}$ est l'emsemble des idéaux quadratiques propres contenant Q, muni de l'inclusion, alors $\mathcal{F}$ est non vide et toute famille totalement ordonné admet un majorant, d'après le théorème de Zorn, $\mathcal{F}$ admet un élément maximal M, $M \in \mathcal{MQ}(J)$ et $Q \subset M$.

Soient $x \in J$ et $M \in \mathcal{MQ}(J)$. Supposons que $x \notin M$, soit K l'ideal de J engendré par x. $M + K$ est un idéal quadratique contenant strictement M

(puisque $x \notin M$ et $x \in M + K$). Donc $M + K = J$. Soient $k \in K$ et $m \in M$ tels que $1 = k+m$. $U_{1-k}(J) = U_m(J) \subset M \neq J$, donc $1-k$ n'est pas inversible. D'où $k \notin \mathrm{Rad}(J)$, or $k \in K$, l'idéal engendré par x, donc $x \notin \mathrm{Rad}(J)$. D'où $\mathrm{Rad}(J) \subset \bigcap_{M \in \mathcal{MQ}(J)} M$.

Pour montrer l'inclusion dans le sens inverse supposons qu'un élément x de J est tel que $x \notin \mathrm{Rad}(J)$; d'après le théorème II.5 $x^2 \notin \mathrm{Rad}(J)$ (on évite le cas $x \notin \mathrm{Rad}(J)$ et $x^2 \in \mathrm{Rad}(J)$ dans la démonstration de Hogben–McCrimmon donnée pour ce théorème dans [3]). Donc il existe un $y \in J$ tel que x^2 soit non quasi-inversible dans $J^{(y)}$ II.3, or $x^2 = U_x(1)$, d'après II.3 ii), il existe y dans J tel que $U_x(y)$ ne sera pas quasi-inversible dans J. Donc $U_{1-U_x(y)}(J)$ est un idéal quadratique propre de J, soit $M \in \mathcal{MQ}(J)$ tel que $U_{1-U_x(y)}(J) \subset M$. Supposons que $x \in M$ alors $U_x(y)$, $(U_x(y))^2$ sont dans M et on a $1 - 2U_x(y) + (U_x(y))^2 = U_{1-U_x(y)}(1) \in M$ donc $1 \in M$, ce qui est impossible, donc $x \notin M$. ∎

THÉORÈME II.9. *Si A est une algèbre associative unitaire alors*

$$\mathrm{Rad}(A) = \{x \in A : \forall a \in A, 1 - xax \text{ est inversible } \}.$$

Preuve. A^+ est une algèbre de Jordan et $\mathrm{Rad}(A) = \mathrm{Rad}(A^+)$ (voir [6]). L'opérateur U_x de A^+ coïncide avec $R_x L_x$ de A. ∎

COROLLAIRE II.10. *Si A est une algèbre associative unitaire alors*

$$\mathrm{Rad}(A) = \{x \in A : \forall a \in xA, 1 - ax \text{ est inversible } \}.$$

Preuve. D'après le théorème précédent, $x \in \mathrm{Rad}(A)$ si et seulement si, pour tout $a \in A$, $1 - (xa)x$ est inversible, c'est-a-dire pour tout $a \in xA$, $1 - ax$ est inversible. ∎

THÉORÈME II.11. (McCrimmon, [6]) *Si A est une algèbre associative unitaire alors*

$$\mathrm{Rad}(A) = \{x \in A : \forall a \in A, 1 - xax \text{et } 1 - axa \text{ sont inversibles } \}.$$

COROLLAIRE II.12. *Si A est une algèbre associative alors on a l'implication suivante*

$$\forall a \in A, 1 - xax \text{ est inversible} \quad \Rightarrow \quad \forall a \in A, 1 - axa \text{ est inversible .}$$

Preuve. Si pour tout a dans A, $1 - xax$ est inversible alors $x \in \mathrm{Rad}(A)$. Ainsi II.11 implique que $\forall a \in A$, $1 - axa$ est inversible. ∎

Remarque II.13. La réciproque de II.12 n'est pas vraie.

Soit A une algèbre associative de division (i.e. tout élément non nul est inversible) et soit x un élément de A qui ne soit pas un carré. $\forall a \in A \setminus \{0\}$, $x \neq a^{-2}$, c'est-à-dire $1 \neq axa$. Donc $\forall a \in A$, $1 - axa$ est inversible. Alors que $\forall a \in A$, $1 - xax$ est inversible $\Rightarrow x = 0$, car si $x \neq 0$ alors x^{-1} existe et pour $a = x^{-2}$ on a $1 - xax = 1 - 1 = 0$.

CONTINUITÉ DES DÉRIVATIONS DE JORDAN Soit A une algèbre de Banach sur $\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$. Soit D une application linéaire de A dans A. D est une dérivation si pour tout a et b dans A on a $D(ab) = aD(b) + D(a)b$. On dit que D est une dérivation de Jordan si pour tout $a \in A$, $D(a^2) = aD(a) + D(a)a$. Toute dérivation est une dérivation de Jordan. La reciproque n'est pas toujours vraie, mais une application linéaire D de A est une dérivation de Jordan de A si, et seulement si, D est une dérivation de A^+.

Dans [5], Johnson et Sinclair ont montré que toute dérivation d'une algèbre de Banach semi-simple est continue. On a aussi le même résultat pour une dérivation de Jordan:

A est semi-première si, $aAa = \{0\} \Rightarrow a = 0$.

LEMME II.14. *Si A est une algèbre associative semi-simple alors A est semi-première.*

Preuve. Soit $a \in A$, si $aAa = 0$ alors $1 - axa = 1$ pour tout x dans A. D'après II.9 a est dans le radical de A. Donc a est nul. ∎

THÉORÈME II.15. (Bresar [2]) *Si A est semi-première alors toute dérivation de Jordan de A est une dérivation.*

Le théorème suivant est démontré dans [2, Theorem 6]; nous en proposons ici une autre preuve.

THÉORÈME II.16. *Si A est une algèbre de Banach semi-simple alors toute dérivation de Jordan sur A est continue.*

Preuve. Soit D une dérivation de Jordan de A. D'après le Lemme II.14, A est semi-première. Donc D est une dérivation de A (d'après le théorème II.15). Le théorème de Johnson-Sinclair affirme que D est continue. ∎

Une question naturelle se pose: a-t-on la continuité automatique des dérivations d'une algèbre de Jordan-Banach J semi-simple?

Le théorème II.16, donne une réponse affirmative dans le cas où J est spéciale, puisque si $J = A^+$ avec A une algèbre de Banach alors $\mathrm{Rad}(J) = \mathrm{Rad}(A)$ et une application linéaire D de J est une dérivation de J si et seulement si D est une dérivation de Jordan de A.

Références

[1] AUPETIT, B., "Propriétés Spectrales des Algébres de Banach", L. Notes in Math., vol. 735, Springer–Verlag, 1979.

[2] BRESAR, M., Jordan derivations on semiprime rings, *Proc. Amer. Math. Soc.,* **104** (1988), 1003 - 1006.

[3] HOGBEN, L., MCCRIMMON, K., Maximal modular inner ideals and the Jacobson radical of a Jordan algebra, *J. Algebra,* **68** (1981), 155 - 169.

[4] JACOBSON, N.,Structure and representations of Jordan algebras, *Amer. Math. Soc. Colloq.,* **39** (1968).

[5] JOHNSON, B.E., SINCLAIR, M., Continuity of derivations and a problem of Kaplansky, *Amer. J. Math.,* **90** (1968), 1067 - 1073.

[6] MCCRIMMON, K., A characterization of the Jacobson–Smiley radical, *J. of Algebra,* **18** (1971), 565 - 573.

[7] MCCRIMMON, K., Non commutative Jordan rings, *Trans. Amer. Math. Soc.,* **158** (1) (1971), 1 - 33.

[8] MCCRIMMON, K., A characterization of the radical of Jordan algebras, *J. of Algebra,* **18** (1971), 103 - 111.

[9] SCHAFER, R.D., "An Introduction to Nonassociative Algebras", Acad. Press, , 1966.

[10] SMILEY, The radical of an alternative rings, *Ann. of Math.,* **49** (3) (1948), 702 - 709.

[11] ZHEVLAKOV, K.A., SLIN'KO, A.M., SHESTAKOV, I.P. SHIRSHOV, A.I., "Rings that are Nearly Associative", Acad. Press, New–York, London, 1982.