EXTRACTA MATHEMATICAE Vol. 9, Núm. 1, 21 – 27 (1994)

Construcción Canónica de Cúspides y Aproximación a su Jacobiana

FERNANDO PABLOS ROMO[1]

Dpto. de Matemática Pura y Aplicada, Univ. de Salamanca, 37008 *Salamanca, España*

AMS *Subject Class.* (1991): 14A15, 14H20, 14H40 *Received July* 30, 1993

INTRODUCCIÓN

Sea $(X,\mathcal{O}_X)$ una curva completa, lisa y separada, sobre un cuerpo k y sea $p\in X$ un punto cerrado de modo que su cuerpo residual $k(p)$ sea separable sobre k. Nos proponemos construir una curva $(X^{n)},\mathcal{O}_{X^{n)}})$ birracionalmente equivalente a $(X,\mathcal{O}_X)$ y tal que $(X^{n)},\mathcal{O}_{X^{n)}})$ tenga una singularidad cuspidal de multiplicidad n en el punto en el cual centra el anillo de valoración $\mathcal{O}_p$.

La curva $(X^{n)},\mathcal{O}_{X^{n)}})$ está caracterizada por ser la suma amalgamada

$$X \coprod_{\operatorname{Esp} \mathcal{O}_p/m_p^n} \operatorname{Esp} k(p)$$

Para acabar se computa el functor de puntos de su esquema de Picard, $\operatorname{Pic}(X^{n)})$ para aproximarnos a su jacobiana.

1. CONSTRUCCIÓN LOCAL

Sea $\mathcal{O}_p$ un anillo de valoración (noetheriano, de dimensión 1, local e íntegramente cerrado), de modo que su cuerpo residual $k(p)$ sea separable sobre k. Denotemos por m_p su ideal maximal.

Dada la proyección canónica

$$\mathcal{O}_p/m_p^n \xrightarrow{\bar{\pi}} k(p),$$

el conjunto de los elementos separables sobre k, $\pi_0^k(\mathcal{O}_p/m_p^n)$, es una subálgebra de $\mathcal{O}_p/m_p^n$ y, por el hecho de ser $\mathcal{O}_p/m_p = k(p)$ separable sobre k, es un retracto de $\bar{\pi}$.

---

[1] El artículo ha sido realizado bajo la dirección del Prof. Dr. D. José María Muñoz Porras y forma parte del Proyecto de Investigación PB91–0188 apoyado por la Universidad de Salamanca.

$$\begin{tikzcd} k(p) \cong \pi_0^k(\mathcal{O}_p/m_p^n) \arrow[r, hook, "\phi"] & \mathcal{O}_p/m_p^n \arrow[d, "\bar{\pi}"] \\ & k(p) \end{tikzcd} \qquad \bar{\pi}\circ\phi \simeq Id_{|k(p)}$$

Luego tenemos una sección canónica, $s_n\colon k(p) \hookrightarrow \mathcal{O}_p/m_p^n$ que dota a $\mathcal{O}_p/m_p^n$ de estructura de $k(p)$–álgebra.

Si consideramos los morfismos de k–álgebras

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{O}_p \arrow[d, "\pi'"] \\ k(p) \arrow[r, hook, "s_n"] & \mathcal{O}_p/m_p^n \end{tikzcd}$$

podemos construir la k–álgebra $\mathcal{O}_p \times_{\mathcal{O}_p/m_p^n} k(p)$ que se identifica con $\pi'^{-1}(s_n(k(p))$ y se tiene el siguiente cuadrado conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_p \times_{\mathcal{O}_p/m_p^n} k(p) \arrow[r, hook, "\pi_1"] \arrow[d, "\pi'"'] & \mathcal{O}_p \arrow[d, "\pi'"] \\ k(p) \arrow[r, hook, "s_n"] & \mathcal{O}_p/m_p^n \end{tikzcd}$$

donde π_1 es un morfismo de k–álgebras inyectivo. Denotemos $\mathcal{O}' = \operatorname{Im}\pi_1$.

TEOREMA 1. *Dado un anillo de valoración $\mathcal{O}_p$ sobre un cuerpo k de modo que su cuerpo residual $k(p)$ sea separable sobre k, canónicamente puede obtenerse una cúspide $\mathcal{O}' \simeq \mathcal{O}_p \times_{\mathcal{O}_p/m_p^n} k(p)$, de multiplicidad n, y con cierre entero $\mathcal{O}_p$ que se alcanza en la primera explosión.*

Se comprueba que $\mathcal{O}'$ es un anillo local de cuerpo residual $k(p)$ y que el morfismo natural $\mathcal{O}' \xhookrightarrow{i} \mathcal{O}_p$ es un morfismo finito.

Como $\mathcal{O}_p$ es noetheriano, entonces $\mathcal{O}'$ es noetheriano, y además $\dim \mathcal{O}' = 1$.

Por otro lado se tiene un isomorfismo entre los cuerpos de fracciones $\Sigma_{\mathcal{O}'} \simeq \Sigma_{\mathcal{O}_p}$ y se deduce que $\mathcal{O}_p$ es el cierre entero de $\mathcal{O}'$ en $\Sigma_{\mathcal{O}'}$.

El polinomio de Samuel de $\mathcal{O}'$ es $[S_{m'}\mathcal{O}'](k) = \ell(\mathcal{O}'/m'^k) = n\cdot k-(n-1)$ con lo que la multiplicidad de $\mathcal{O}'$ es n y $\ell(\mathcal{O}_1/\mathcal{O}') = n\cdot 1$, siendo $\mathcal{O}_1$ el anillo de la primera explosión de $\mathcal{O}'$.

A partir de esta longitud, se demuestra que $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_p$ y por lo tanto el cierre entero se alcanza en la primera explosión.

2. Construcción global

Sean $(X, \mathcal{O}_X)$ una curva completa, lisa y separada sobre un cuerpo k y $p \in X$ un punto cerrado de la misma, de modo que su cuerpo residual $k(p)$ sea separable sobre k.

Pretendemos construir una curva $(X^{n)}, \mathcal{O}_{X^{n)}})$ birracionalmente equivalente a $(X, \mathcal{O}_X)$ y tal que tenga una única singularidad cuspidal en el punto p.

Si denotamos por $\mathcal{O}_p$ el anillo local de $(X, \mathcal{O}_X)$ en p, de la construcción local sabemos que $\mathcal{O}' \simeq \mathcal{O}_p \times_{\mathcal{O}_p/m_p^n} k(p)$ es un anillo local, no regular, de multiplicidad n y que desingulariza en la primera explosión a $\mathcal{O}_p$.

Sea $U \subseteq X$ un abierto afín de $(X, \mathcal{O}_X)$ conteniendo al punto p. Vamos a estudiar el anillo $\mathcal{O}_X(U) \times_{\mathcal{O}_p/m_p^n} k(p)$, que se obtiene a partir de los morfismos:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_X(U) \arrow[r, hook, "j_p"] & \mathcal{O}_p \arrow[r] \arrow[d] & k(p) \arrow[dl, shift left, "s_n"] \\ & \mathcal{O}_p/m_p^n \arrow[ur, shift left] & \end{tikzcd}$$

Tenemos un morfismo inyectivo

$$\mathcal{O}_X(U) \times_{\mathcal{O}_p/m_p^n} k(p) \xhookrightarrow{\ \phi_1\ } \mathcal{O}_X(U)$$

y denotaremos $\mathcal{O}_{X^{n)}}(U) = \mathrm{Im}\ \pi_1$.

Razonando de manera análoga al caso local se consigue probar que

$$\mathcal{O}_{X^{n)}}(U) \xhookrightarrow{\ i\ } \mathcal{O}_X(U)$$

es finito, de donde $\mathcal{O}_{X^{n)}}(U)$ es noetheriano (siendo, además, una k−álgebra finito generada), $\mathcal{O}_{X^{n)}}(U)$ es un anillo de dim 1 y la correspondiente aplicación entre los espectros

$$\pi \colon \mathrm{Esp}\ \mathcal{O}_X(U) \longrightarrow \mathrm{Esp}\ \mathcal{O}_{X^{n)}}(U)$$

es epiyectiva. Además $\Sigma_X \simeq \Sigma_{X^n}$ y se tiene que $\mathcal{O}_X(U)$ es el cierre entero de $\mathcal{O}_{X^{n)}}(U)$.

Por otro lado se verifica que $[\mathcal{O}_{X^{n)}}(U)]_{\pi(q)} \simeq \mathcal{O}_q$ si $q \in \operatorname{Esp} \mathcal{O}_X(U)$ es un punto de $(X, \mathcal{O}_X)$ distinto de p, que $[\mathcal{O}_{X^{n)}}(U)]_{\pi(p)} \simeq \mathcal{O}'$ y por lo tanto $\operatorname{Esp} \mathcal{O}_{X^{n)}}(U) \simeq U$.

TEOREMA 2. *Dada una curva completa, lisa y separada $(X, \mathcal{O}_X)$ sobre un cuerpo k y dado un punto cerrado $p \in X$ de modo que su cuerpo residual $k(p)$ sea separable sobre k, existe una curva $(X^{n)}, \mathcal{O}_{X^{n)}})$ birracionalmente equivalente a $(X, \mathcal{O}_X)$ y con una única singularidad cuspidal de multiplicidad n en el punto en el cual centra el anillo de valoración $\mathcal{O}_p$.*

Basta considerar un recubrimiento $\{U_i\}$ por abiertos afines de $(X, \mathcal{O}_X)$ de modo que el punto $p \in X$ sólo pertenezca a uno de estos abiertos. Sea U_1 el abierto afín al que pertenece p.

Se demuestra que la familia de esquemas $\{X'_i\}$, donde

$$X'_1 = \left[U_1, [\mathcal{O}_X(U_1) \times_{\mathcal{O}_p/m_p^n} k(p)]^{\sim}\right]$$

y $X'_i = (U_i, [\mathcal{O}_X(U_i)]^{\sim})$ para $i \neq 1$, junto con los morfismos naturales

$$\varphi_{ij} : X'_{ij} \longrightarrow X'_{ji}$$

en las intersecciones, son datos de construcción de un esquema $(X^{n)}, \mathcal{O}_{X^{n)}})$ que es la curva buscada.

3. Caracterización de la curva $(X^{n)}, \mathcal{O}_{X^{n)}})$

TEOREMA 3. *En la categoría de esquemas, la curva $(X^{n)}, \mathcal{O}_{X^{n)}})$ es la suma amalgamada*

$$X \coprod_{\operatorname{Esp} \mathcal{O}_p/m_p^n} \operatorname{Esp} k(p)$$

Si tenemos en cuenta que un morfismo de esquemas $f: X \longrightarrow Y$ factoriza a través de la proyección $\pi: X \longrightarrow X^{n)}$ si y sólo si existe un cuadrado conmutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \\ \operatorname{Esp} \mathcal{O}_p/m_p^n \arrow[u, hook, "i"] \arrow[r, "g"] & \operatorname{Esp} k(p) \arrow[u, "h"'] \arrow[ul, "j"'] \end{tikzcd}$$

donde $h = f \circ j$, se verifica la propiedad universal de la suma amalgamada de esquemas

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{esq.}}(X^{n)}, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{esq.}}(X, Y) \underset{\mathrm{Hom}_{\mathrm{esq.}}(\mathrm{Esp}\,\mathcal{O}_p/m_p^n, Y)}{\times} \mathrm{Hom}_{\mathrm{esq.}}(\mathrm{Esp}\, k(p), Y)$$

4. FUNCTOR DE PUNTOS DEL ESQUEMA DE PICARD, $\mathrm{Pic}(X^{n)})$. APROXIMACIÓN A LA JACOBIANA $J_{X^{n)}}$.

Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ una curva lisa, completa, separada y con un punto racional sobre un cuerpo k y sea $p \in X$ de modo que su cuerpo residual $k(p)$ sea separable sobre k.

Consideramos $(X^{n)}, \mathcal{O}_{X^{n)}})$ curva birracionalmente equivalente a $(X, \mathcal{O}_X)$, con un punto cuspidal $\bar{p} \in X^{n)}$ de multiplicidad n, centrado en el anillo de valoración $\mathcal{O}_p$ y que desingulariza en la primera explosión.

Nos proponemos estudiar el functor de puntos del esquema de Picard, $\mathrm{Pic}(X^{n)})$, en términos del functor de puntos de $\mathrm{Pic}(X)$.

Sea $S \longrightarrow \mathrm{Esp}\, k$ un esquema noetheriano. A partir del morfismo de desingularización

$$\pi\colon X \longrightarrow X^{n)}$$

podemos obtener el morfismo

$$\pi_S\colon X \times S \xrightarrow{\pi \times Id} X^{n)} \times S$$

de donde tenemos

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{X^{n)} \times S} \longrightarrow (\pi_s)_* \mathcal{O}_{X \times S} \longrightarrow C_s \longrightarrow 0$$

con $C \simeq m_p/m_p^n$ y C_S está concentrado en $\bar{p} \times S$.

Como π es un morfismo afín, $\pi \times Id$ también y considerando el cambio de base

$$\mathrm{Esp}\, k(\bar{p}) \times S \longrightarrow X^{n)} \times S$$

tenemos el cuadrado

$$\begin{tikzcd}
D \times S \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\pi'_S"'] & X \times S \arrow[d, "\pi_S"] \\
\mathrm{Esp}\, k(\bar{p}) \times S \arrow[r, "j"] & X^{n)} \times S
\end{tikzcd}$$

donde D es la fibra de $\bar{p}$ por π, es decir $D = \mathrm{Esp}\,(\mathcal{O}_p/m_p^n)$.

Si consideramos en $\mathcal{O}_D$ su estructura de módulo, el esquema $\mathcal{A}ut(\mathcal{O}_D)$, cuyo functor de puntos en un esquema noetheriano S es

$$[\mathcal{A}ut(\mathcal{O}_D)]^{\cdot}(S) = \mathcal{A}ut(\mathcal{O}_{D\times S}) = \Gamma(S, \mathcal{O}_p/m_p^n \otimes \mathcal{O}_S)^* =$$
$$= \Gamma(S, (k(p)\otimes\mathcal{O}_S)^* \oplus (m_p/m_p^n \otimes \mathcal{O}_S)),$$

es un esquema en grupos conmutativos.

Se tiene una sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\bar{p}\times S} \xrightarrow{\phi_s} (\pi_s')_*(\mathcal{O}_{D\times S}) \xrightarrow{h_s} j^*C_s \longrightarrow 0$$

y por otro lado, si tenemos dos isomorfismos:

$$\alpha, \alpha' \colon (\pi_s')_*(\mathcal{O}_{D\times S}) \simeq (\pi_s')_*(L_{|D\times S})$$

donde L es un haz de línea en $X\times S$, establecemos la relación de equivalencia $\alpha \sim \alpha'$ si $\alpha\circ\phi_S$ y $\alpha'\circ\phi_S$ difieren en un automorfismo de $\mathcal{O}_{\bar{p}\times S}$.

Como π_s' es un morfismo afín, los isomorfismos α, α' son equivalentes a otros isomorfismos $\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}'$

$$\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}' \colon \mathcal{O}_{D\times S} \simeq L_{|D\times S}$$

y tenemos para cada L, de modo que $L_{|D\times S}$ sea trivial, clases de equivalencia de isomorfismos entre $\mathcal{O}_{D\times S}$ y $L_{|D\times S}$ mod(automorfismos de $\mathcal{O}_{\bar{p}\times S}$).

TEOREMA 4.

$$[\mathrm{Pic}(X^{n)})]^{\cdot}(S) = \{([\bar{L}, [\bar{\alpha}]]) \text{ donde } [\bar{L}] \in [\mathrm{Pic}(X)]^{\cdot}(S) \text{ y } \tilde{\alpha}\colon [\mathcal{O}_{D\times S}] \simeq [\bar{L}_{|D\times S}]\},$$

es decir, un haz de línea relativo en $X^{n)}\times S$ equivale a una pareja formada por un haz de línea relativo $[\bar{L}]$ en $X\times S$ y una trivialización de la restricción de $[\bar{L}]$ a $D\times S$.

Sea $[\mathcal{L}] \in [\mathrm{Pic}(X^{n)})]^{\cdot}(S)$. Consideremos un representante $\mathcal{L}$, de modo que $\mathcal{L}_{|\bar{p}\times S} \simeq \mathcal{O}_{\bar{p}\times S}$.

Se comprueba la existencia de un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{L}_{|\bar{p}\times S} \arrow[r] & (\pi_s')_*\left[(\pi_S)^*\mathcal{L}_{|D\times S}\right] \arrow[r] & j^*C_S \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_{\bar{p}\times S} \arrow[r, "\phi_S"] & (\pi_s')_*\left[\mathcal{O}_{D\times S}\right] \arrow[r, "h_S"] \arrow[u, "\alpha"] & j^*C_S \arrow[r] \arrow[u, equal, "Id"'] & 0
\end{tikzcd}$$

Luego a $[\mathcal{L}] \in [\mathrm{Pic}(X^{n)})]^{\cdot}(S)$, podemos asignarle

$$([(\pi_S)^*\mathcal{L}],[\tilde{\alpha}])$$

donde $[(\pi_S)^*\mathcal{L}]\in[\mathrm{Pic}(X)]^{\cdot}(S)$ y $[\tilde{\alpha}]$ es la clase de equivalencia de $\tilde{\alpha}\colon \mathcal{O}_{D\times S}\simeq (\pi_S)^*\mathcal{L}_{|D\times S}$ módulo la relación anterior.

Utilizando la relación de adjunción entre $(\pi_S)^*$ y $(\pi_S)_*$ se calcula la asignación recíproca y se demuestra que las construcciones son una inversa de la otra.

COROLARIO 5. *La jacobiana de $(X^{n)},\mathcal{O}_{X^{n)}})$, $J_{X^{n)}}$, es una extensión de J_X por el esquema en grupos $K^{n)}$, donde*

$$(K^{n)})^{\cdot}(S)=\Gamma(S,m_p/m_p^n\otimes\mathcal{O}_S)=\mathcal{A}ut(\mathcal{O}_{D\times S})/\mathcal{A}ut(\mathcal{O}_{\bar{p}\times S}).$$

El núcleo del morfismo natural $\pi^*\colon J_{X^{n)}}\longrightarrow J_X$ coincide con el núcleo del morfismo entre los esquemas de Picard ya que $J_{X^n}{}^{\cdot}(S)=[\mathrm{Pic}^0(X^{n})]^{\cdot}(S)$ y $J_X(S)=[\mathrm{Pic}^0(X)]^{\cdot}(S)$. Teniendo en cuenta que $\mathcal{A}ut(\mathcal{O}_{\bar{p}\times S})=\Gamma(S,(k(p)\otimes\mathcal{O}_S)^*)$ se concluye.

COROLARIO 6. *Si el cuerpo k es algebraicamente cerrado y de característica cero, $J_{X^{n)}}$ es una extensión de J_X por el esquema en grupos*

$$G_a\times\overset{n-1)}{\cdots}\times G_a.$$

Basta tener en cuenta que $\dim_k m_p/m_p^n=n-1$.

REFERENCES

1. GROTHENDIECK, A., "Elements de Géométrie Algébrique I", Instiute des Hautes Etudes Scientifiques, Publications Mathématiques, 4, Paris, 1960.
2. GROTHENDIECK, A., "Elements de Géométrie Algébrique II", Instiute des Hautes Etudes Scientifiques, Publications Mathématiques, 8, Paris, 1961.
3. GROTHENDIECK, A., Fondements de la Géométrie Algébrique, in "Seminaire Bourbaki 1957–1962", Paris, 1962.
4. HARTSHORNE, R., "Algebraic Geometry", Springer–Verlag, New York, 1980.
5. MATSUMURA, H., "Commutative Algebra", Second Edition, Benjamin, New York, 1980.
6. NAVARRO GONZÁLEZ, J.A., "Teoría de Galois", Serv. Publ. Dpto. Matemáticas, Univ. Extremadura, Badajoz, 1984.