EXTRACTA MATHEMATICAE 3, n.1, 28-30 (1988)

Un teorema de Prokhorov para medidas de Radón de tipo $(\mathcal{H})$.

por

Fidel José Fernández y Fernández-Arroyo

Introducción .

Es bien conocido el interés del Teorema de Prokhorov por su aplicación al cálculo de probabilidades y a la construcción y determinación de existencia de medidas cilíndricas .

En 1973, L.Schwartz [3] dio un teorema de existencia del límite proyectivo para medidas finitas, de Radón de tipo (K), en espacios topológicos separados ; mejorando así los trabajos iniciales realizados por el propio Prokhorov (1956) y por Chorksi (1958) , Bochner (1960) y Métivier (1963) .

Posteriormente, en 1979, B.Rodríguez Salinas y P.Jiménez Guerra [2] consiguieron generalizar este resultado a un sistema proyectivo $(E,E_i,\Pi_{ij},\Pi_i,\mu_i)$ de espacios topológicos arbitrarios (separados o no), dotados de medidas μ_i, no necesariamente finitas, de Radón de tipo $(\mathcal{H}_i)$, siendo cada $\mathcal{H}_i$ una familia arbitraria de conjuntos cerrados . Se dan en [2] condiciones necesarias y suficientes para que el límite proyectivo de las medidas μ_i exista y sea una medida de Radón de tipo $(\mathcal{H}')$, donde $\mathcal{H}'$ es la familia de los subconjuntos cerrados de los $H\in\mathcal{H}$: siendo $\mathcal{H}$ una familia filtrante $(\subset)$ de conjuntos cerrados, regulares para la topología relativa, cuyas proyecciones son cerradas (o cerradas en $\Pi_i(E)$), y de medida $\mu_i(\Pi_i(H))$ finita, para i suficientemente grande (dependiente de $H\in\mathcal{H}$) .

Clasificación según AMS 1980 : 28C15 .

En el presente extracto presentamos un teorema de este tipo, pero con hipótesis aún más débiles para los conjuntos $H \in \mathcal{H}$, pues no hace falta que sean regulares para la topología relativa, y tampoco se pide que sus proyecciones sean cerradas. Sí se exige, en cambio, que $\mu_i(\overline{\Pi_{ij}(H_j)}) < +\infty$, para $j \geqslant i$ y $H_j \in \mathcal{H}_j$.

El autor desea manifestar su agradecimiento al Dr. D. Pedro Jiménez Guerra, Catedrático de Análisis Matemático de la Universidad Nacional de Educación a Distancia, por toda la información y las orientaciones proporcionadas sobre el tema .

Preliminares .

Denotaremos por I un conjunto dirigido ; para cada $i \in I$, (E_i, T_i) será un espacio topológico, $\mathcal{H}_i$ una familia de conjuntos cerrados de E_i , y $\mu_i : \mathcal{B}_i = \sigma(T_i) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$ una medida de Radón de tipo $(\mathcal{H}_i)$ (ver [ ]) .

Supondremos que, para cada par $(i,j) \in I \times I$ tal que $i \leq j$, Π_{ji} es una aplicación continua de E_j en E_i, siendo $\Pi_{ii} = Id$; y que, si $k \geqslant j \geqslant i$, entonces $\Pi_{ik} = \Pi_{ij} \cdot \Pi_{jk}$.

Pondremos $E = \varprojlim E_i = \{ (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} E_i / \Pi_{ij}(x_j) = x_i \text{ si } j \geqslant i \}$;
denotaremos por $\Pi_i : E \longrightarrow E_i$ $(i \in I)$ las proyecciones canónicas; y por T la topología menos fina en E que hace continuas las Π_i .

Supondremos que $\mathcal{H}$ es una familia filtrante ($\subset$) de conjuntos cerrados de E , tal que, para cada $H \in \mathcal{H}$, $\mu_i(\overline{\Pi_i(H)}) < +\infty$ para algún $i \in I$; $\mathcal{H}'$ será la familia de los conjuntos cerrados H' de E que están contenidos en algún $H \in \mathcal{H}$ (dependiente de H').

Decimos que una medida $\mu : \mathcal{B} = \sigma(T) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$ es límite proyectivo de las medidas $(\mu_i)_{i \in I}$ si $\mu_i = \Pi_i(\mu)$, para todo $i \in I$.

TEOREMA .

Supondremos que $\mu_i(\overline{\Pi_{ij}(H_j)}) < +\infty$, para todo $(i,j) \in I \times I$ tal que $i \leq j$, y para todo $H_j \in \mathcal{H}_j$.

Consideramos la aplicación $\lambda : P(E) \longrightarrow \overline{R^+}$ dada por $\lambda(A) = \overline{\lim_{i \in I}} \mu_i^{\bullet}(\Pi_i(A)) = \inf_{i \in I} \mu_i^{\bullet}(\Pi_i(A))$, donde

$$\mu_i^{\bullet}(B) = \sup_{H_i \in \mathcal{H}_i} \{ \inf \{ \mu_i(G_i \cap H_i) \;/\; A \subset G_i \in T_i \} \} \quad (B \subset E_i \;,\; i \in I) .$$

Existe una medida $\mu : \mathcal{B} = \sigma(T) \longrightarrow \overline{R^+}$, de Radón de tipo $(\mathcal{H}')$, límite proyectivo de las medidas $(\mu_i)_{i \in I}$, si y sólo si se verifican :

1) Todo $H \in \mathcal{H}$ es λ-compacto .

2) Para todo $\varepsilon > 0$, todo $i \in I$ y todo $H_i \in \mathcal{H}_i$, existe $H \in \mathcal{H}$ tal que $\mu_i(H_i) \leq \lambda(H \cap \Pi_i^{-1}(H_i)) + \varepsilon$.

Además, si esta medida existe, es única, y se verifica que $\mu(H') = \lambda(H') = \inf_{i \in I} \mu_i(\overline{\Pi_i(H')})$, para todo $H' \in \mathcal{H}'$.

Bibliografía .

[1] Jiménez Guerra, P.:"Un criterio de correspondencia entre las medidas cilíndricas y las medidas de Radón de tipo $(\mathcal{H})$". Rev.R.Acad.Ci.Madrid, 74(1980), 111-115 .

[2] Rodríguez-Salinas, B. y Jiménez Guerra,P.:"Medidas de Radón de tipo $(\mathcal{H})$ en espacios topológicos arbitrarios". Memorias R.Acad.Ci.Madrid, t.X (1979) .

[3] Schwartz, L.:"Radon measures on arbitrary topological spaces and cylindrical measures".Oxford University Press,1973.

Departamento de Matemáticas Fundamentales
Facultad de Ciencias / U.N.E.D.
c/Senda del Rey, s/n / Ciudad Universitaria
28040-Madrid