EXTRACTA MATHEMATICAE 3, n.1, 17-19 (1988)

SUCESIONES DE POLINOMIOS ORTOGONALES ESTRICTAMENTE γ-TIPICAS

Emilio Torrano y Rafael Guadalupe (*)

Introducción:

El estudio de las extensiones típicas, γ -típicas y estrictamente γ-típicas fué iniciado por el Prof. Vigil en [5] dentro del marco de la teoria de Polinomios Ortogonales sobre curvas algebraícas en el plano complejo. Fundamentalmente se trata de resolver problemas relativos a la localización de las raices de los P.O. .

El análisis de las sucesiones de P.O. estrictamente típicas en R ha sido desarrollado en [1], donde se prueba que, en este caso, el ser estrictamente típica equivale a ser una sucesión clásica de P.O.

En [3] dimos una nueva caracterización de las extensiones típicas. Concretamente vimos que un segmento $\{P_k(z)\}_{k=0}^{n}$ de P.O. es estrictamente típico si la matriz $\hat{D}_n$ es fuertemente normal. La matriz $\hat{D}_n$ es la matriz truncada del operador multiplicación por z en Π - espacio de los polinomios- respecto de la S.P.O.N.

Aquí probaremos, en primer lugar, que las únicas matrices de Hessenberg -$\hat{D}_n$ lo es- fuertemente normales son las tridiagonales. En segundo lugar veremos que una matriz tridiagonal normal con subdiagonal real y positiva -otra característica de $\hat{D}_n$- tiene siempre sus autovalores sobre una recta. Como los autovalores de $\hat{D}_n$ son los ceros de $P_n(z)$ el corolario es obvio: las sucesiones de P.O. estrictamente γ-típicas pueden construirse unicamente cuando γ es una recta del plano complejo.

Definición:

Sea A_n una matriz cuadrada compleja de orden n; llamaremos $(A_n)_k$ con $k \leq n$, $k \in N$ a la matriz que resulta de tomar en A_n las k primeras filas y columnas.

Diremos que A_n es fuertemente normal si $(A_n)_k$ es normal para $k = 2, 3, ..., n$

Observación 1ª:

Cuando hablamos de matrices de Hessenberg (superiores) es decir aquellas $A_n = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ tales que $a_{ij} = 0$ si $j + 1 < i$, nos referimos a matrices de Hessenberg cumpliendo $a_{i+1,i} \neq 0 \quad 1 \leq i \leq n-1$.

Análogamente cuando afirmamos que una matriz $A_n = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ es tridiagonal, es decir $a_{ij}=0$ si $|i-j|>1$, aludimos a matrices que verifican $a_{i+1,i} \neq 0$ y $a_{i,i+1} \neq 0$ $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Proposición 1ª:

Las únicas matrices de Hessenberg fuertemente normales son las tridiagonales.

Observación 2ª:

Es fácil ver que toda matriz tridiagonal normal es fuertemente normal; el reciproco obviamente no es cierto, cualquier matriz hermitiana es fuertamente normal y no tiene porque ser tridiagonal.

Proposición 2ª:

Sea A_n una matriz tridiagonal compleja con subdiagonal real y positiva, si es normal entonces sus autovalores estan sobre una recta.

Teorema:

Sea γ una curva algebraica en C y sea $\{P_k(z)\}_{k=0}^n$ un segmento de P.O. relativos a estrictamente γ-típico; entonces γ es necesariamente una recta.

Observación final:

Este último resultado es un paso adelante en la demostración de la imposibilidad de hallar distribuciones sobre γ -cuando γ no es una recta- tal que todos los ceros de los P.O. asociados a ella esten sobre γ .

Referencias:

[1] Guadalupe, J.J. y Vinuesa, J. "Una condición adicional al teorema de equivalencia de las fórmulas fundamentales para sucesiones reales de polinomios ortogonales". Rev. Ac. Ciencias, Zaragoza 36 (1981).

[2] Lancaster P. y Tismenetsky M. "The Theory of Matrices". Academic Press (1985).

[3] Torrano, E. "Interpretación Matricial de los polinomios ortogonales en el caso complejo". Tesis Doctoral. Santander (1987).

[4] Vinuesa, J. El problema de la Extensión Típica. La conjetura de Vigil (en Alfaro, M. et all edits. "Contribuciones Matemáticas en ho nor de Luis Vigil". Zaragoza (1984) ISBN 84600-3400 -2-pags. 259-301).

[5] Vigil, L. "Caracterización de la extensión típica de un producto escalar". Rev. Matemática Hispano-Americana. Tomo XXIX, nº 4, Madrid (1969).

(*) Dpto. de Matemática Aplicada
Facultad de Informática
Universidad Politécnica
28031-Madrid

Subject Classification AMS 1980: 42C05, 30C15, 12D10