ZUBÍA	7	15-27	Logroño	1989

RELACIONES DE RESTRICCIÓN EN REPRESENTACIONES MATRICIALES DE POLARIZACIÓN DE LA LUZ*

J.J. Gil**
P.M. Arnal**
J. Murillo**
R. Escolano**

RESUMEN

Se presenta un compacto y detallado estudio de las relaciones que existen entre los elementos de una matriz de Mueller genérica. Este estudio nos permite establecer algunos teoremas relativos a sistemas ópticos que afectan a la polarización de luz que interacciona con ellos. Se desarrolla un análisis análogo en los formalismos del Vector de Polarización y de Jones.

Palabras clave: Luz polarizada.

A compact and detailed study of the relations between the elements of a generic Mueller matrix is developped. This study allows us to state some theorems related with polarizing optical systems. An annalogous analysis is carried out in the Polarization Vector and Jones formalisms.

Key words: Polarized light.

0. INTRODUCCIÓN

En trabajos previos, algunos autores han estudiado la naturaleza y la expresión matemática de las relaciones que existen entre los 16 elementos de una matriz de Mueller (Gil et al., 1985). Abhyankar y Fymat (1969) han demostrado en varios formalismos algunas relaciones entre los elementos de matrices que representan un mismo sistema óptico que

* Recibido el 16 de Marzo de 1989. Aprobado el 20 de Abril de 1989.

** Escuela Universitaria de Magisterio. Luis de Ulloa s/n (Logroño).

no despolariza. Además, Fry et al. (1981) han hecho un estudio más detallado de estas relaciones en el formalismo Stokes-Mueller (SMF), que incluye también ciertas desigualdades para el caso general de sistemas que despolarizan. Barakat (1963) ha obtenido un sistema de ecuaciones equivalente al dado por los anteriores, pero con una expresión matemática diferente. Finalmente, Schaefer (1981) ha establecido una serie de desigualdades que se cumplen en toda matriz de Mueller.

En el presente trabajo se hace un detallado estudio de las relaciones que existen entre los elementos de una matriz de Mueller. Esto nos permite obtener una condición necesaria y suficiente para que una matriz de Mueller represente un sistema que no despolariza. Un estudio similar conduce al formalismo del vector de polarización (PVF) (Abhyankar et al., 1969; Barakat, 1963), y los resultados son analizados en el formalismo del cálculo de Jones (JCF) (Jones, 1941).

1. RELACIONES ENTRE LOS ELEMENTOS DE UNA MATRIZ DE MUELLER

Consideramos un haz de luz caracterizado por un vector de Stokes S, que incide sobre un sistema óptico cuya matriz de Mueller asociada es M. El haz de luz de salida tiene asociado un vector de Stokes S'=MS, cuyos elementos están dados por:

$$S_i' = \sum_{j=0}^{3} m_{ij} S_j \; ; \qquad i = 0,1,2,3. \tag{1}$$

donde m_{ij} representan los elementos de M.

Elevando al cuadrado los dos miembros de la expresión (1), se obtiene:

$$S_i'^2 = \sum_{j=0}^{3} m_{ij}^2 S_j^2 + \sum_{l,k=0}^{3} m_{il}\, m_{ik}\, S_l\, S_k \tag{2}$$

que con la conocida relación:

$$S_0^2 \geq S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 \tag{3}$$

conduce a:

$$\sum_{j=0}^{3} m_{0j}^2 S_j^2 + \sum_{l,k=0}^{3} m_{0l}\, m_{0k}\, S_l\, S_k \geq \sum_{i=1}^{3} \left[\sum_{j=0}^{3} m_{ij}^2 S_j^2 + \sum_{l,k=0}^{3} m_{il}\, m_{ik}\, S_l\, S_k \right] \tag{4}$$

Esta relación ha sido establecida para todo estado de polarización del haz de luz incidente, y por tanto para los siguientes vectores de Stokes:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

que junto con (4) da:

$$(m_{0i} + m_{00})^2 \geq \sum_{j=1}^{3} (m_{ji} + m_{j0})^2 ; \tag{6.a}$$

$$(m_{0i} - m_{00})^2 \geq \sum_{j=1}^{3} (m_{ji} - m_{j0})^2 ; \quad i = 1,2,3 \tag{6.b}$$

Sumando estas relaciones, obtenemos:

$$m_{0i}^2 + m_{00}^2 \geq \sum_{j=1}^{3} m_{ji}^2 + m_{j0}^2 ; \quad i = 1,2,3 \tag{7}$$

Si la matriz de Mueller M corresponde a un sistema óptico que no despolariza, la desigualdad (3), es igualdad, de modo que las expresiones (4), (5), (6) y (7) se transforman respectivamente en:

$$\sum_{j=1}^{3} (m_{00}^2+m_{0j}^2)\ S_j^2 + \sum_{l,k=0}^{3} m_{0l}\, m_{0k}\, S_l\, S_k = \sum_{i=1}^{3} \left[\sum_{j=1}^{3} (m_{i0}^2+m_{jj}^2)\ S_j^2 + \sum_{l,k=0}^{3} m_{il} m_{ik} S_l S_k \right] \tag{8}$$

$$(m_{0i} + m_{00})^2 = \sum_{j=1}^{3} (m_{ji} + m_{j0})^2 \tag{9.a}$$

$$(m_{0i} - m_{00})^2 = \sum_{j=1}^{3} (m_{ji} - m_{j0})^2 \quad ; \quad i = 1,2,3. \tag{9.b}$$

$$m_{0i}^2 + m_{00}^2 = \sum_{j=1}^{3} m_{ji}^2 + m_{j0}^2 \quad ; \quad i = 1,2,3. \tag{10.a}$$

A partir de (9) y (10.a) es fácil demostrar que:

$$m_{0i}\, m_{00} = \sum_{j=1}^{3} m_{ji}\, m_{j0} \quad ; \quad i = 1,2,3. \tag{10.b}$$

Sustituyendo (10.a) y (10.b) en (8) encontramos:

$$m_{0i}\, m_{0j} = \sum_{k=1}^{3} m_{ki}\, m_{kj} \quad ; \quad i,j = 1,2,3. \quad i \neq j. \tag{10.c}$$

Podemos resumir los resultados anteriores en el siguiente teorema: "Una matriz de Mueller M representa un sistema óptico que no despolariza, si y sólo si satisface el sistema de nueve ecuaciones (10)".

En general una matriz de Mueller M satisface el conjunto de seis desigualdades (6).

El sistema (10) ha sido obtenido previamente por Barakat (1981), a partir de las propiedades del grupo de Lorentz propio ortocrono. Debido a esto, sus resultados excluyen el caso de matrices que representan polarizadores puros; estas matrices son singulares, por lo que no forman grupo.

Dada una matriz de Mueller M, su matriz traspuesta M^T es también de Mueller (Sekera, 1966). Este hecho indica que las relaciones (6), (7), (9) y (10), tienen que ser satisfechas por M^T. Así podemos escribir:

$$(m_{i0} + m_{00})^2 \geq \sum_{j=1}^{3} (m_{ij} + m_{0j})^2 \qquad (11.a)$$

$$(m_{i0} - m_{00})^2 \geq \sum_{j=1}^{3} (m_{ij} - m_{0j})^2 \qquad (11.b)$$

$$m_{i0}^2 + m_{00}^2 \geq \sum_{j=1}^{3} m_{ij}^2 + m_{0j}^2 \quad ; \quad i = 1,2,3. \qquad (12)$$

Cuando M representa un sistema que no despolariza, M^T representa también un sistema que no despolariza, y esto conduce a:

$$(m_{i0} + m_{00})^2 = \sum_{j=1}^{3} (m_{ij} + m_{0j})^2 \qquad (13.a)$$

$$(m_{i0} - m_{00})^2 = \sum_{j=1}^{3} (m_{ij} - m_{0j})^2 \quad ; \quad i = 1,2,3. \qquad (13.b)$$

$$m_{i0}^2 + m_{00}^2 = \sum_{j=1}^{3} m_{ij}^2 + m_{0j}^2 \quad ; \quad i = 1,2,3. \qquad (14.a)$$

$$m_{i0}m_{00} = \sum_{j=1}^{3} m_{ij}m_{0j} \quad ; \quad i = 1,2,3. \qquad (14.b)$$

$$m_{i0}m_{k0} = \sum_{k=1}^{3} m_{ij}m_{kj} \quad ; \quad i,k = 1,2,3. \quad i \neq k. \qquad (14.c)$$

Los sistemas de seis desigualdades (6) y (11) y el compuesto por (7) y (12) son totalmente equivalentes, aunque tienen diferentes expresiones matemáticas. Lo mismo ocurre con los sistemas de nueve ecuaciones (10) y (14).

Indicamos a continuación otros sistemas de desigualdades e igualdades que son equivalentes a los vistos anteriormente.

Desigualdades

$$(m_{00}+m_{11})^2 - (m_{01}+m_{10})^2 \geq (m_{22}+m_{33})^2 + (m_{32}-m_{23})^2 \;; \qquad (15.a)$$

$$(m_{00}-m_{11})^2 - (m_{01}-m_{10})^2 \geq (m_{22}-m_{33})^2 + (m_{32}+m_{23})^2 \;; \qquad (15.b)$$

$$(m_{00}+m_{10})^2 - (m_{01}+m_{11})^2 \geq (m_{02}+m_{12})^2 + (m_{03}+m_{13})^2 \;; \qquad (15.c)$$

$$(m_{00}-m_{10})^2 - (m_{01}-m_{11})^2 \geq (m_{02}-m_{12})^2 + (m_{03}-m_{13})^2 \;; \qquad (15.d)$$

$$(m_{00}+m_{01})^2 - (m_{10}+m_{11})^2 \geq (m_{20}+m_{21})^2 + (m_{30}+m_{31})^2 \ ; \qquad (15.e)$$

$$(m_{00}-m_{01})^2 -(m_{10}-m_{11})^2 \geq (m_{20}-m_{21})^2 + (m_{30}-m_{31})^2 \ ; \qquad (15.f)$$

Igualdades

$$(m_{00}+m_{11})^2 - (m_{01}+m_{10})^2 = (m_{22}+m_{33})^2 + (m_{32}-m_{23})^2 \ ; \qquad (16.a)$$

$$(m_{00}-m_{11})^2 - (m_{01}-m_{10})^2 = (m_{22}-m_{33})^2 + (m_{32}+m_{23})^2 \ ; \qquad (16.b)$$

$$(m_{00}+m_{10})^2 - (m_{01}+m_{11})^2 = (m_{02}+m_{12})^2 + (m_{03}+m_{13})^2 \ ; \qquad (16.c)$$

$$(m_{00}-m_{10})^2 - (m_{01}-m_{11})^2 = (m_{02}-m_{12})^2 + (m_{03}-m_{13})^2 \ ; \qquad (16.d)$$

$$(m_{00}+m_{01})^2 - (m_{10}+m_{11})^2 = (m_{20}+m_{21})^2 + (m_{30}+m_{31})^2 \ ; \qquad (16.e)$$

$$(m_{00}-m_{01})^2 -(m_{10}-m_{11})^2 = (m_{20}-m_{21})^2 + (m_{30}-m_{31})^2 \ ; \qquad (16.f)$$

$$m_{02}\, m_{03} - m_{12}\, m_{13} = m_{22}\, m_{23} + m_{32}\, m_{33} \ ; \qquad (17.a)$$

$$m_{20}\, m_{30} - m_{21}\, m_{31} = m_{22}\, m_{32} + m_{23}\, m_{33} \ ; \qquad (17.b)$$

$$m_{03}\, m_{12} - m_{02}\, m_{13} = m_{31}\, m_{20} + m_{30}\, m_{21} \ ; \qquad (17.c)$$

Las igualdades (17) pueden reemplazarse por las tres siguientes:

$$m_{22}^2 - m_{23}^2 + m_{32}^2 - m_{33}^2 = m_{02}^2 - m_{03}^2 - m_{12}^2 + m_{13}^2 \ ; \qquad (18.a)$$

$$m_{22}^2 - m_{32}^2 + m_{23}^2 - m_{33}^2 = m_{20}^2 - m_{30}^2 - m_{21}^2 + m_{31}^2 \ ; \qquad (18.b)$$

$$m_{20}^2 - m_{21}^2 + m_{30}^2 - m_{31}^2 = m_{02}^2 - m_{12}^2 + m_{03}^2 - m_{13}^2 \ ; \qquad (18.c)$$

Las igualdades (16) fueron obtenidas por Abhyankar et al. (1969), completando el sistema de nueve ecuaciones independientes con tres relaciones cuárticas. Fry et al. (1981) demostraron más tarde que tales relaciones cuárticas pueden sustituirse por (17) o (18) y que en general, las seis desigualdades (15) se verifican.

2. EXPRESIÓN GLOBAL DE LAS RESTRICCIONES QUE EXISTEN EN LAS MATRICES DE MUELLER.

El sistema de igualdades (10) puede obtenerse de otra manera. En este sentido, consideramos un haz de luz con un vector asociado **S** de Stokes y matriz de polarización ρ (Wolf, 1959) que pasa a través de un sistema que no despolariza, cuyas matrices asociadas en ambos formalismos SMF y JCF son M y J, respectivamente; el haz de luz emergente se caracteriza por un vector de Stokes $S' = MS$ y una matriz de polarización $\rho' = J\rho J^T$, lo que nos conduce a:

$$\det \rho' = [\det j]^2 \det \rho. \qquad (19)$$

Además, teniendo en cuenta que

$$S_0^2 - S_1^2 - S_2^2 - S_3^2 = 4 \det \rho. \qquad (20)$$

obtenemos:

$$S_0'^2 - S_1'^2 - S_2'^2 - S_3'^2 = [\det.J]^2 (S_0^2 - S_1^2 - S_2^2 - S_3^2). \qquad (21)$$

La forma cuadrática semidefinida positiva:

$$F = S_0^2 - S_1^2 - S_2^2 - S_3^2 \ ; \qquad (22)$$

asociada al vector de Stokes **S**, puede escribirse de la forma:

$$F=\mathbf{S}^T \, g \, \mathbf{S}; \tag{23}$$

donde

$$g \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{24}$$

y $\mathbf{S}^T$ es el vector-fila traspuesto del vector columna **S**.

Considerando que $\mathbf{S}'^T = \mathbf{S}^T M^T$, podemos escribir:

$$F' = \mathbf{S}'^T g \, \mathbf{S}' = \mathbf{S}^T M^T g \, M\mathbf{S} \tag{25}$$

De (21), (22) y (25), obtenemos:

$$\mathbf{S}^T M^T g \, M \, \mathbf{S} = [\det.\ J]^2 \, \mathbf{S}^T g \, \mathbf{S}; \tag{26}$$

que se verifica para todo vector **S** de Stokes, por lo que

$$M^T g \, M = [\det J]^2 \, g \tag{27}$$

La relación (27) expresa en forma matricial el sistema de desigualdades (10). Podemos escribir también la relación (27) para la matriz M^T, lo que nos conduce a:

$$M \, g \, M^T = [\det.\ J^+] \, g. \tag{28}$$

De (28) y

$$(\det.\ J.) = [\det J^+] \quad ; \tag{29}$$

obtenemos la siguiente condición:

$$M^T g \, M = M \, g \, M^T = [\det.\ J]^2 \, g \quad ; \tag{30}$$

La condición (30) expresa de forma global las restricciones que existen entre los elementos de M. De (30), se pueden obtener conjuntos diferentes y equivalentes de nueve igualdades independientes.

3. CONDICIONES DE RESTRICCION PARA MATRICES EN PVF

Consideremos la matriz de polarización (Wolf, 1959).

$$\rho \approx \begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{bmatrix} \quad ; \tag{31}$$

El vector de polarización **D**, asociado al mismo haz de luz que ρ, se define por (Abhyankar et al., 1969):

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \rho_{11} \\ \rho_{12} \\ \rho_{21} \\ \rho_{22} \end{bmatrix} \tag{32}$$

Toda matriz de polarización ρ es hermitiana ($\rho = \rho^+$), por lo que sus elementos están sujetos a las siguientes condiciones:

$$\mathrm{Im}\,(d_0) = \mathrm{Im}(d_3) \quad ; \tag{33.a}$$

$$d_2^* = d_1 \quad ; \tag{33.b}$$

Cuando un haz de luz con vector de polarización **D** pasa a través de un sistema óptico lineal, existe una matriz V asociada a dicho sistema, tal que el vector **D**´correspondiente al haz de luz de emergente viene dado por:

$$\mathbf{D}' = \mathrm{V}\ \mathbf{D} \quad ; \tag{34.a}$$

con
$$\mathrm{V} \approx (\mathrm{V}_{ij}) \quad i,j = 0,1,2,3. \tag{34.b}$$

A partir de ahora denotaremos con V las matrices asociadas a sistemas ópticos en el PVF.

Puesto que **D** y **D**´ deben satisfacer las condiciones (33) vemos que V está sujeto a las condiciones:

$$\begin{gathered} V_{10} = V^*_{20} \\ V_{01} = V^*_{02} \\ V_{13} = V^*_{23} \\ V_{31} = V^*_{32} \\ V_{11} = V^*_{22} \\ V_{21} = V^*_{12} \\ \mathrm{Im}\,(V_{00}) = \mathrm{Im}\,(V_{03}) = \mathrm{Im}\,(V_{30}) = \mathrm{Im}\,(V_{33}) = 0 \end{gathered} \tag{35}$$

Estas condiciones son inherentes a la definición de las matrices V. Una matriz V asociada a un sistema óptico que no despolariza depende solo de siete parámetros reales, y como en (35), debe existir un conjunto de nueve igualdades entre los elementos de V. Dicho sistema es:

$$V_{00}\, V_{03} = V_{01}\, V_{02} \tag{36.a}$$

$$V_{00}\, V_{30} = V_{10}\, V_{20} \tag{36.b}$$

$$V_{30}\, V_{33} = V_{31}\, V_{32} \tag{36.c}$$

$$V_{03}\, V_{33} = V_{13}\, V_{23} \tag{36.d}$$

$$V_{03}\, V_{33} = V_{11}\, V_{22} \tag{36.e}$$

$$V_{03}\, V_{30} = V_{12}\, V_{21} \tag{36.f}$$

$$V_{01}\, V_{31} + V_{02}\, V_{32} = V_{11}\, V_{21} + V_{12}\, V_{22} \tag{37.a}$$

$$V_{10}\, V_{13} + V_{20}\, V_{23} = V_{11}\, V_{12} + V_{21}\, V_{22} \tag{37.b}$$

$$V_{10}\, V_{23} + V_{13}\, V_{20} = V_{01}\, V_{32} + V_{02}\, V_{31} \tag{37.c}$$

En lugar de (37) podemos usar las siguientes igualdades:

$$V_{01}\, V_{31} - V_{02}\, V_{32} = V_{11}\, V_{21} - V_{12}\, V_{22} \tag{38.a}$$

$$V_{10}\, V_{13} - V_{20}\, V_{23} = V_{11}\, V_{12} - V_{21}\, V_{22} \tag{38.b}$$

$$V_{10} V_{23} - V_{13} V_{20} = V_{01} V_{32} - V_{02} V_{31} \tag{38.c}$$

Los términos de las relaciones bilineales (36), (37) y (38) son cantidades reales y pueden obtenerse a partir de:

$$V = J \times J^{+} \tag{39}$$

donde x representa el producto de Kronecker.

4. EXPRESION GLOBAL DE LAS RESTRICCIONES EN MATRICES V

Un vector de polarización **D**, puede expresarse en función de su correspondiente vector de Stokes **S** como (Parke, 1949):

$$D = 1/2 \begin{bmatrix} S_0 + S_1 \\ S_2 - iS_3 \\ S_2 + iS_3 \\ S_0 - S_1 \end{bmatrix} \tag{40}$$

así, la forma cuadrática F puede expresarse como:

$$F = 2D^T h D \tag{41}$$

donde D^T es el vector-fila transpuesto de **D**, y h es la matriz:

$$h = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{42}$$

Cuando el haz de luz pasa a través de un sistema que no despolariza, con una matriz asociada V en el PVF, y una matriz de Jones J en el JCF, la magnitud F´ correspondiente al vector de polarización de salida **D**´ viene dada por

$$F' = 2\, \mathbf{D}'^T h\, \mathbf{D}' = 2\, \mathbf{D}^T V^T h\, V\, \mathbf{D} \tag{43}$$

De (21), vemos que:

$$\mathbf{D}^T V^T h\, V\, \mathbf{D} = |\det J|^2\, \mathbf{D}^T h\, \mathbf{D} \tag{44}$$

La igualdad (44) se satisface para todo vector **D**, así:

$$V^T h\, V = |\det J|^2\, h. \tag{45}$$

Escribiendo (45) como una función de los elementos de la matriz V, obtenemos un sistema de nueve ecuaciones independientes, que según (35) puede expresarse con funciones de cantidades reales únicamente.

Cuando una matriz V representa un sistema que no despolariza, la matriz V^+ representa otro sistema que no despolariza. Esto puede demostrarse fácilmente a partir de (40). La relación (45) puede establecerse con V^+ en lugar de V, y obtenemos:

$$V^* h\, V^+ = |\det.\, J^+|^2\, h. \tag{46}$$

Además, de (29) y (46) llegamos a

$$V^T h V = V^* h V^+ = |\det. J|^2 h. \quad (47)$$

$$V^T h V = (V h V^T)^* = |\det. J|^2 h. \quad (48)$$

La relación (48) resume de una forma global las relaciones entre los elementos de una matriz V correspondiente a un sistema que no despolariza. Es de señalar su analogía con la expresión (30), que ha sido establecida para matrices de Mueller.

5. CONDICIÓN DE LA NORMA EN MATRICES DE MUELLER

Para toda matriz de Mueller M, podemos definir una norma ΓM (M), semidefinida positiva, dada por

$$\Gamma_M (M) = [\mathrm{Tr}\,(M^T M)]^{1/2} = [\mathrm{Tr}\,(M\,M^T)]^{1/2} \quad (49)$$

Sumando las relaciones (15) es fácil demostrar que:

$$\Gamma_M (M) \leq 2\, m_{00} \quad (50)$$

Si M representa un sistema que no despolariza, sumando las Eq. (16) y tomando raíces cuadradas, obtenemos:

$$\Gamma_M (M) = 2\, m_{00} \quad (51)$$

Así, la ecuación (51) es una condición necesaria para que M represente a un sistema que no despolariza. Vamos ahora a demostrar que esta condición es también suficiente.

Supongamos que (51) se satisface. Entonces también se deben satisfacer las seis igualdades (16), puesto que, si no, se cumpliría al menos una de las desigualdades (15), y esto implicaría que: $\Gamma_M (M) \leq 2\, m_{00}$, que contradice la hipótesis (51).

Necesitamos ahora demostrar que hay además tres ecuaciones de restricción, tales como (17) o (18) que, junto con las seis anteriores, constituyen un sistema de nueve ecuaciones independientes.

Las desigualdades (7) y (12) pueden expresarse de la forma:

$$x_1 \geq r_1 \quad (52.a)$$

$$y_1 \geq r_1 \quad (52.b)$$

$$z_1 \geq r_1 \quad (52.c)$$

$$x_2 \geq r_2 \quad (53.a)$$

$$y_2 \geq r_2 \quad (53.b)$$

$$z_2 \geq r_2 \quad (53.c)$$

siendo:

$$r_1 = m_{10}^2 + m_{20}^2 + m_{30}^2 - m_{00}^2 \quad (54.a)$$

$$x_1 = m_{01}^2 - m_{11}^2 - m_{21}^2 - m_{31}^2 \quad (54.b)$$

$$y_1 = m_{02}^2 - m_{12}^2 - m_{22}^2 - m_{32}^2 \quad (54.c)$$

$$z_1 = m_{03}^2 - m_{13}^2 - m_{23}^2 - m_{33}^2 \quad (54.d)$$

$$r_2 = m_{01}^2 + m_{02}^2 + m_{03}^2 - m_{00}^2 \quad (55.a)$$

$$x_2 = m_{10}^2 - m_{11}^2 - m_{12}^2 - m_{13}^2 \tag{55.b}$$

$$y_2 = m_{20}^2 - m_{21}^2 - m_{22}^2 - m_{23}^2 \tag{55.c}$$

$$z_2 = m_{30}^2 - m_{31}^2 - m_{32}^2 - m_{33}^2 \tag{55.d}$$

Teniendo en cuenta (16.c-f), las desigualdades (52.a) y (53.a) se convierten en las igualdades $x_1 = r_1$ y $x_2 = r_2$ respectivamente.

Las igualdades (18) pueden escribirse como:

$$y_1 = z_1 \tag{56.a}$$

$$y_2 = z_2 \tag{56.b}$$

$$y_1 = y_2 \tag{56.c}$$

Para demostrar que se satisfacen las igualdades (56), supondremos que una de ellas no se cumple y veremos que se llega a un absurdo cuando Γ_M (M) = 2 m_{00}. Si una de las igualdades (56) es falsa, (52.b-c) y (53.b-c) pueden no cumplirse simultáneamente, a menos que $r_1 \neq r_2$.

Sumando las relaciones (52) y (53) respectivamente, obtenemos:

$$4m_{00}^2 = 2\ (a-b) \geq \sum_{i,j=0}^{3} m_{ij}^2 \tag{57.a}$$

$$4m_{00}^2 = 2\ (b-a) \geq \sum_{i,j=0}^{3} m_{ij}^2 \tag{57.b}$$

siendo

$$a = m_{01}^2 + m_{02}^2 + m_{03}^2$$

$$b = m_{10}^2 + m_{20}^2 + m_{30}^2 \tag{57.c}$$

De (51) y (57) deducimos que

$$a = b \tag{58}$$

luego:

$$r_1 = r_2 \tag{59}$$

Sólo son cuatro las posibilidades que quedan:

$$y_1 > r_1 \ \text{, y/o } z_1 > r_1 \ \text{, y/o } y_2 > r_2 \ \text{, y/o } z_2 > r_2 \tag{60}$$

De las relaciones (52) y (53) obtenemos

$$4m_{00}^2 > \sum_{i,j=0}^{3} m_{ij}^2 \tag{61}$$

que es un absurdo, puesto que contradice la hipótesis (51).

Así, hemos demostrado que si la condición (51) se cumple, el sistema de nueve igualdades independientes (16) y (18) debe cumplirse también.

Lo mismo debe suceder entonces para un sistema equivalente de igualdades. Deduciéndose de todo ello que M representa un sistema que no despolariza.

Podemos resumir las consideraciones anteriores en el siguiente teorema: "Una matriz de Mueller M representa un sistema óptico que no despolariza la luz, si y sólo si verifica la condición Γ_M (M) = 2 m_{00}".

Con este teorema, dada una matriz de Mueller M, podemos conocer si representa un sistema que no despolariza con sólo probar la condición (51) (condición de la norma), sin necesidad de verificar las nueve ecuaciones independientes.

Debe señalarse que el elemento m_{00} de una matriz de Mueller M es la transmitancia en intensidad T_u(M) del medio al que M representa, para luz no polarizada.

Así pues, toda matriz de Mueller puede normalizarse así:

$$\bar{M} = \frac{1}{m_{00}} M \tag{62}$$

La matriz $\bar{M}$ representa a un medio óptico con las mismas propiedades que M, excepto que presenta una transmitancia unidad

$$T_u = m_{00} = 1 \tag{63}$$

La condición (51) puede escribirse ahora como

$$\Gamma_M (\bar{M}) = 2 \tag{64}$$

6. CONDICIÓN DE LA NORMA EN MATRICES DE JONES

En esta sección se pretende obtener una relación entre los elementos de una matriz de Jones genérica J y T_n (J).

Para un sistema óptico que no despolariza, y de acuerdo con la expresión de una matriz de Mueller M en función de su correspondiente matriz de Jones J, m_{00} puede escribirse como (Theocaris et al., 1979)

$$m_{00} = 1/2 \sum_{i,j=1}^{2} | J_{ij} |^2 \tag{65}$$

La relación (65) muestra que, aunque en el formalismo JCF no se pueden representar estados de polarización parcial de la luz, las matrices de Jones contienen información sobre T_u.

Podemos asociar a una matriz de Jones J una norma Γ_J (J), semidefinida positiva, dada por:

$$\Gamma_J (J) = \left[\mathrm{Tr}\,(J^+ J)\right]^{1/2} = \left[\mathrm{Tr}\,(J\, J^+)\right]^{1/2} = \Big[\sum_{i,j=1}^{2} | J_{ij} |^2\Big]^{1/2} \tag{66}$$

Ahora de (65) y (66) obtenemos

$$\Gamma_J^2 (J) = 2\, m_{00} = 2\, T_u \tag{67}$$

Comparando (66) y (67), obtenemos:

$$\Gamma_J^2 (J) = \Gamma_M(M) \tag{68}$$

La relación (68) muestra que la condición de la norma (51), dada para un matriz de Mueller, es una consecuencia de la definición (66) de la norma de una matriz de Jones J asociada al mismo sistema que M. Las matrices M y J pueden normalizarse simultáneamente, de la siguiente manera:

$$\bar{M} = \frac{1}{m_{00}} M \tag{69.a}$$

$$\bar{J} = \frac{2}{\sum_{i,j=1}^{2} | J_{ij} |^2} J \tag{69.b}$$

$$\Gamma_M (\bar{M}) = \Gamma_J^2 (\bar{J}) = 2 \tag{70}$$

7. CONDICION DE LA NORMA PARA MATRICES V EN EL PVF

A toda matriz V del PVF se le puede asociar una norma Γ_V (V), semidefinida positiva, dada por:

$$\Gamma_V (V) = \left[\mathrm{Tr}\,(V^+ V)\right]^{1/2} = \left[\mathrm{Tr}\,(V\, V^+)\right]^{1/2} = \left[\sum_{i,j=1}^{3} | V_{ij} |^2\right]^{1/2} \tag{71}$$

La matriz de Mueller asocia al mismo medio óptico que V, se relaciona con ella de la manera siguiente (Abhyankar et al, 1969):

$$V = U^{-1}\, M\, U; \tag{72.a}$$

donde U es la matriz

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & i & -i & 0 \end{bmatrix} \tag{72.b}$$

Entonces

$$\Gamma_V^2 (V) = \mathrm{Tr}\,(V^+ V) = \mathrm{Tr}\,(U^{-1} M^T U\, U^{-1} M\, U) \tag{73}$$

Puesto que U es una matriz unitaria y Tr (A B) = Tr (B A), la expresión (73) conduce a

$$\Gamma_V (V) = \Gamma_M (M) \tag{74}$$

válida para todo medio óptico, independientemente de sus características particulares.

Cuando V está asociada a un sistema que no despolariza, es fácil demostrar, a partir de (40) y (70), que:

$$\Gamma_V (V) = \mathrm{Tr}\,(J\, J^+) = \mathrm{Tr}\,(J^+ J) \tag{75}$$

Las relaciones (66), (67), (68) y (75) nos permiten escribir

$$\Gamma_V (V) = \Gamma_M (M) = \Gamma_J^2 (J) = 2m_{00} \tag{76}$$

donde las matrices V, M y J están asociadas al mismo sistema óptico que no despolariza.

Una matriz V puede normalizarse como sigue

$$\bar{V} = \frac{2}{(V_{00} + V_{03} + V_{30} + V_{33})} V \tag{77}$$

que, de acuerdo con (72), conduce a

$$\frac{(V_{00} + V_{03} + V_{30} + V_{33})}{2} = m_{00} = Tu \tag{78}$$

Siguiendo un proceso análogo al realizado con las matrices de Mueller, se puede demostrar que la condición, necesaria y suficiente, para que una matriz V represente a un sistema que no despolariza, es

$$\Gamma_V (V) = V_{00} + V_{03} + V_{30} + V_{33} \tag{79}$$

o bien

$$\Gamma_V (\bar{V}) = 2 \tag{80}$$

REFERENCIAS

Abhyankar, K.D., Fymat, A.L., 1969. Relations between the elements of the Phase Matrix for scattering. *J. Math. Phys.* (10), 1935-38.

Azzam, R.M.A., Bashara, N.H., 1977. *Ellipsometry and Polarized Light.* N. Holland, Amsterdam.

Barakat, R., 1981. Bilinear constraints between elements of the 4x4 Mueller-Jones transfer matrix of polarization theory. *Opt. Commum* (38), 159-61.

Barakat, R., 1963. Theory of the Coherency Matrix for light of arbitrary spectral bandwidth. *J. Opt. Soc Am. A.* (53), 317-323.

Fry, E.S., Kattawar, G.W., 1981. Relationships between elements of the Stokes matrix. *Appl. Opt.* (20), 2811-14.

Gil, J.J. y Bernabeu, E., 1985. A depolarization criterion in Mueller matrices. *Optica Acta* (32), 259-261.

Jones, R.C., 1941. New calculus for the treatment of optical systems. I. *J. Opt. Soc Am. A.* (31), 488-493.

Kim, K., Mandel, L. y Wolf. E., 1987. Relationship between Jones and Mueller matrices of random media. *J. Opt. Soc. Am. A.* (4), 433-437.

Parke, N.G., 1949. Optical Algebra. *J. Math Phys.* (13), 131-139.

Schaefer, R.W., 1981. Inequalities between the elements of the Mueller scattering matrix. *Appl. Opt.* (20), 2875.

Sekera, Z., 1966. Scattering matrices and reciprocity relationships for various representations of the state of polarization. *J. Opt. Soc. Am.* (56), 1732-740.

Theocaris, P.S., Gdoutos, E.E., 1979. *Matrix Theory of Photoelasticity.* Springer-Velarg. Berlín.

Van de Hulst, H.C., 1957. *Light scattering by small particles.* Wiley, New York.

Wolf, E., 1959. Coherence Properties of Partially Polarized Electromagnetic Radiation. *Nuovo Cimento.* (13), 1165-181.